

Bài I (2,0 điểm)

Cho hai biểu thức $A = \frac{x}{\sqrt{x-1}}$ và $B = \frac{4}{\sqrt{x+2}} - \frac{\sqrt{x-6}}{x+2\sqrt{x}}$ với $x > 0$ và $x \neq 1$.

- Tính giá trị biểu thức A tại $x = 4$;
- Rút gọn biểu thức B ;
- Tìm giá trị nguyên của x để biểu thức $P = A.B$ đạt giá trị lớn nhất.

Bài II (2,0 điểm). Giải bài toán bằng cách lập phương trình hoặc hệ phương trình:

Hai người thợ cùng sơn một ngôi nhà, mất 4 ngày thì xong việc. Hai người cùng làm trong 1 ngày thì người thứ nhất có việc bận nên một mình người thứ hai làm trong 6 ngày nữa thì mới xong công việc. Hỏi mỗi người làm việc một mình thì sau bao lâu xong công việc?

Bài III (2,0 điểm)

1) Giải hệ phương trình:
$$\begin{cases} \frac{3}{x-2} - 2|y-3| = 4 \\ \frac{2}{x-2} + |y-3| = 5 \end{cases}$$

2) Trên mặt phẳng Oxy cho đường thẳng $(d): y = (2m+1)x - m^2 - m + 6$ và Parabol $(P): y = x^2$

- Tìm tọa độ giao điểm của (d) và (P) khi $m = 1$.
- Tìm m để (d) cắt (P) tại hai điểm phân biệt có hoành độ x_1, x_2 sao cho: $|x_1^2 - x_2^2| = 50$

Bài IV (3,5 điểm)

1) Cho một hình trụ có bán kính đáy là 3cm . Biết diện tích xung quanh của hình trụ là $90\pi\text{cm}^2$. Tính thể tích của hình trụ.

2) Cho đường tròn (O) đường kính AB . Qua trung điểm C của OA vẽ dây DE vuông góc với OA . Gọi K là điểm tùy ý trên cung nhỏ BD ($K \neq B, D$). H là giao điểm của AK và DE .

- Chứng minh tứ giác $BCHK$ là tứ giác nội tiếp.
- Chứng minh $AH.AK = AD^2$.
- Lấy điểm F trên đoạn KE sao cho $KF = KB$. Chứng minh tam giác KFB là tam giác đều. Xác định vị trí của điểm K trên cung nhỏ BD để tổng $KD + KB + KE$ đạt giá trị lớn nhất.

Bài V (0,5 điểm)

Chứng minh rằng:
$$\frac{a+b}{\sqrt{a(3a+b)} + \sqrt{b(3b+a)}} \geq \frac{1}{2}$$
 với a, b là các số dương.

..... Hết

Bài	Ý	Đáp án	Điểm
Bài I 2,0 điểm	1)	Tính giá trị của biểu thức A khi $x = 4$	0,5
		Với $x = 4$ (Thỏa mãn ĐKXD) thì	0,25
		$A = \frac{4}{\sqrt{4}-1} = \frac{4}{1} = 4$	0,25
	2)	Rút gọn biểu thức $B = \frac{4}{\sqrt{x}+2} - \frac{\sqrt{x}-6}{x+2\sqrt{x}}$	1,0
		Với $x > 0, x \neq 1$ ta có: $B = \frac{4}{\sqrt{x}+2} - \frac{\sqrt{x}-6}{\sqrt{x}(\sqrt{x}+2)} = \frac{4\sqrt{x}-\sqrt{x}+6}{\sqrt{x}(\sqrt{x}+2)}$	0,5
		$= \frac{3(\sqrt{x}+2)}{\sqrt{x}(\sqrt{x}+2)} = \frac{3}{\sqrt{x}}$	0,5
Bài II 2,0 điểm	3)	Tìm giá trị nguyên của x để biểu thức $P = A.B$ đạt giá trị lớn nhất.	0,5
		Ta có $P = A.B = \frac{x}{\sqrt{x}-1} \cdot \frac{3}{\sqrt{x}} = \frac{3\sqrt{x}}{\sqrt{x}-1} = 3 + \frac{3}{\sqrt{x}-1}$	
		Với $x > 0, x \neq 1, x \in \mathbb{N}$ ta có: $x \geq 2 \Leftrightarrow \sqrt{x}-1 \geq \sqrt{2}-1 \Leftrightarrow P \leq 3 + \frac{3}{\sqrt{2}-1} = 6 + 3\sqrt{2}$	0,25
		Dấu bằng xảy ra $\Leftrightarrow x = 2$ (tmđk)	
		Vậy P đạt GTLN = $6 + 3\sqrt{2}$ khi $x = 2$	0,25
		Giải bài toán bằng cách lập phương trình hoặc hệ phương trình: Hai người thợ cùng sơn một ngôi nhà, mất 4 ngày thì xong việc. Hai người cùng làm trong 1 ngày thì người thứ nhất có việc bận nên một mình người thứ hai làm trong 6 ngày nữa thì mới xong công việc. Hỏi mỗi người làm việc một mình thì sau bao lâu xong công việc?	2,0
	Gọi thời gian người thứ nhất sơn một mình xong ngôi nhà là x (ngày) (đk $x > 4$) và thời gian người thứ hai sơn một mình xong ngôi nhà là y (ngày) (đk $y > 4$).	0,25	
	Trong 1 ngày người thứ nhất sơn được $\frac{1}{x}$ (ngôi nhà), người thứ hai sơn được $\frac{1}{y}$ (ngôi nhà), nên cả hai người sơn được $\frac{1}{x} + \frac{1}{y}$ (ngôi nhà).	0,25	
	Vì cả hai người cùng sơn sau 4 ngày thì xong, nên có pt: $\frac{1}{x} + \frac{1}{y} = \frac{1}{4}$	0,25	

Sau 6 ngày người thứ hai sơn được được $6 \cdot \frac{1}{y} = \frac{6}{y}$ (ngôi nhà), 0,25

Vì khi đó cả hai người sơn xong ngôi nhà, nên ta có phương trình $\frac{1}{4} + \frac{6}{y} = 1$.

Vậy ta có hệ phương trình:
$$\begin{cases} \frac{1}{x} + \frac{1}{y} = \frac{1}{4} \\ \frac{1}{4} + \frac{6}{y} = 1 \end{cases}$$
 0,25

Giải HPT (trực tiếp hoặc đặt ẩn phụ) ta được $\begin{cases} x = 8 \\ y = 8 \end{cases}$ (tmdk) 0,5

Vậy người thứ nhất sơn một mình xong ngôi nhà trong 8 ngày, người thứ hai sơn một mình xong ngôi nhà trong 8 ngày. 0,25

1

Giải hệ phương trình sau:
$$\begin{cases} \frac{3}{x-2} - 2|y-3| = 4 \\ \frac{2}{x-2} + |y-3| = 5 \end{cases}$$
 1,0

Ta có điều kiện $x \neq 2$ (0,25)

$$\begin{cases} \frac{3}{x-2} - 2|y-3| = 4 \\ \frac{2}{x-2} + |y-3| = 5 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \frac{7}{x-2} = 1 \\ |y-3| = 1 \end{cases}$$
 0,25

$$\frac{7}{x-2} = 14 \Leftrightarrow x-2 = \frac{1}{2} \Leftrightarrow x = \frac{5}{2} \text{ (tmdk)}$$

$$|y-3| = 1 \Leftrightarrow \begin{cases} y-3 = 1 \\ y-3 = -1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y = 4 \\ y = 2 \end{cases}$$
 0,25

Vậy nghiệm của hệ phương trình là $(x; y) = \left(\frac{5}{2}; 4\right); \left(\frac{5}{2}; 2\right)$ 0,25

Bài III
2,0 điểm

2a) Trên mặt phẳng Oxy cho đường thẳng (d): $y = (2m+1)x - m^2 - m + 6$ và Parabol (P): $y = x^2$
a) Tìm tọa độ giao điểm của (d) và (P) khi $m = 1$. 1,0

Xét PT HĐGD của (d) và (P): $x^2 - (2m+1)x + m^2 + m - 6 = 0$ (1)
Thay $m = 1$ vào PT HĐGD của (d) và (P) ta được PT: $x^2 - 3x - 4 = 0$ 0,5

Giải phương trình tìm được $x_1 = -1; x_2 = 4 \Rightarrow 2$ giao điểm $(-1; 1)$ và $(4; 16)$

0,25

2b) Tìm m để (d) cắt (P) tại hai điểm phân biệt có hoành độ $x_1; x_2$ sao cho:
 $|x_1^2 - x_2^2| = 50$

Tính được $\Delta = 25$ nên PT (1) có hai nghiệm phân biệt với mọi giá trị của m.
 Tính được: $x_1 = m + 3; x_2 = m - 2$, thay vào đk: $|x_1^2 - x_2^2| = 50$

$\Leftrightarrow |m^2 + 6m + 9 - m^2 + 4m - 4| = 50 \Leftrightarrow |2m + 1| = 10$
 $\Leftrightarrow m = \frac{9}{2}$ (tmdk) hoặc $m = -\frac{11}{2}$ (tmdk) 0,25

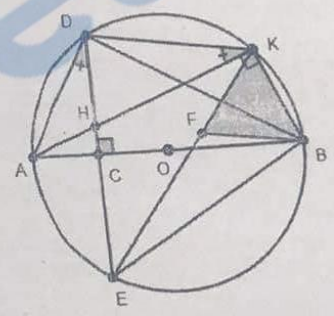
KL: Vậy $m \in \left\{ \frac{9}{2}; -\frac{11}{2} \right\}$ thì (d) cắt (P) tại hai điểm phân biệt có hoành độ $x_1; x_2$ sao cho: $|x_1^2 - x_2^2| = 50$ 0,25

IV. 1 Cho một hình trụ có bán kính đáy là 3cm. Biết diện tích xung quanh của hình trụ là $90\pi \text{ cm}^2$. Tính thể tích của hình trụ. 0,5

$S_{xq} = 90\pi \text{ cm}^2 \Rightarrow 2\pi rh = 90\pi, r = 3\text{cm} \Rightarrow h = 15\text{cm}$

$V = \pi r^2 h = 135\pi \text{ cm}^3$ 0,25

IV. 2



2a) a) Chứng minh tứ giác BCHK là tứ giác nội tiếp. 0,75

Chứng minh các góc $\sphericalangle KCB = 90^\circ; \sphericalangle KHB = 90^\circ$ 0,25

Chứng minh tứ giác BCKH là tứ giác nội tiếp (dnhb) 0,5

2b) b) Chứng minh $AH \cdot AK = AD^2$. 1,0

Chứng minh $\sphericalangle AD = \sphericalangle AE$ 0,25

Chứng minh $\sphericalangle ADH = \sphericalangle AKD$ 0,25

Chứng minh ΔAHD đồng dạng ΔADK (g.g) 0,25

$\Rightarrow \frac{AH}{AD} = \frac{AD}{AK} \Rightarrow AH \cdot AK = AD^2$

Bài IV 3,5 điểm

	2c)	c) Lấy điểm F trên cạnh KE sao cho $KF = KB$, Chứng minh tam giác KFB là tam giác đều. Xác định vị trí của điểm K trên cung nhỏ BD để tổng $KD + KB + KE$ đạt giá trị lớn nhất. Tính giá trị đó. Chứng minh $\triangle BDE$ đều (3 cạnh $= R\sqrt{3}$);	1,0
		C/m $\triangle BKF$ đều $\Rightarrow KB = BF = KF$	0,25
		Chứng minh $\triangle BFE = \triangle BKD$ (c.g.c) $\Rightarrow FE = KD$ $KD + KB + KE = FE + KF + KE = 2KE$ lớn nhất khi KE là đường kính.	0,25
		$\Rightarrow GTLN(KD + KB + KE) = 2.2R = 4R$	0,25
Bài V 0,5 điểm		Ta có $\frac{a+b}{\sqrt{a(3a+b)} + \sqrt{b(3b+a)}} = \frac{2(a+b)}{\sqrt{4a(3a+b)} + \sqrt{4b(3b+a)}} \quad (1)$	
		Áp dụng bất đẳng thức Cô-si cho các số dương ta được: $\sqrt{4a(3a+b)} \leq \frac{4a + (3a+b)}{2} = \frac{7a+b}{2} \quad (2)$ $\sqrt{4b(3b+a)} \leq \frac{4b + (3b+a)}{2} = \frac{7b+a}{2} \quad (3)$	0,25
		Từ (2) và (3) suy ra: $\sqrt{4a(3a+b)} + \sqrt{4b(3b+a)} \leq 4a + 4b \quad (4)$ Từ (1) và (4) suy ra: $\frac{a+b}{\sqrt{a(3a+b)} + \sqrt{b(3b+a)}} \geq \frac{2(a+b)}{4a+4b} = \frac{1}{2}$ Dấu "=" xảy ra $\Leftrightarrow a = b$	0,25

---HẾT---