

Bài I (2,0 điểm): Cho hai biểu thức: $A = \frac{\sqrt{x}-3}{2\sqrt{x}+6}$ và $B = \frac{x+16}{x-4} + \frac{5}{2-\sqrt{x}}$ với $x \geq 0, x \neq 4; x \neq 9$.

1) Tính giá trị của biểu thức A khi $x = 25$.

2) Chứng minh $B = \frac{\sqrt{x}-3}{\sqrt{x}+2}$.

3) Với x là số tự nhiên thỏa mãn $x > 3$, tìm giá trị lớn nhất của biểu thức $P = \frac{B}{A}$.

Bài II (2,5 điểm):

1) Giải bài toán bằng cách lập phương trình hoặc hệ phương trình.

Bác Tân là nhân viên y tế nhà trường, bác dự định mua một số lọ nước sát khuẩn cùng loại với giá tham khảo trước, tổng là 600 ngàn đồng. Khi đến nơi mua, mỗi lọ đó được giảm giá 2 ngàn đồng nên kể cả tiền mua thêm 2 lọ cùng loại cho gia đình mình, bác phải trả tổng số tiền là 672 ngàn đồng. Tính giá tiền mỗi lọ nước sát khuẩn mà bác Tân dự định mua đó?

2) Một cốc trà sữa hình trụ có bán kính đáy là 4cm. Bạn Sừ bỏ thêm trân châu vào cốc thì thấy trà sữa dâng lên cao thêm 3cm. Tính thể tích phần trân châu bạn Sừ đã bỏ thêm vào? (trân châu chìm hoàn toàn trong trà sữa và không thấm nước).

Bài III (2,0 điểm):

1) Giải hệ phương trình sau:
$$\begin{cases} 3x+3y-\frac{1}{\sqrt{x}-3}=17 \\ x+y+\frac{2}{\sqrt{x}-3}=8 \end{cases}$$

2) Cho parabol (P): $y = x^2$ và đường thẳng (d): $y = mx - m + 1$.

a) Chứng minh (d) và (P) luôn có điểm chung với mọi giá trị của m.

b) Tìm giá trị của m để (d) cắt (P) tại hai điểm phân biệt có tổng khoảng cách đến trục tung bằng 4.

Bài IV (3 điểm):

Từ điểm A nằm ngoài đường tròn (O;R), vẽ hai tiếp tuyến AB, AC đến đường tròn (B, C là các tiếp điểm). Gọi M là giao điểm của OA và BC. Gọi I là trung điểm của BM. Đường thẳng qua I và vuông góc với OI cắt các tia AB, AC theo thứ tự tại D, E. BE cắt AO tại G. Chứng minh:

1) Tứ giác ABOC nội tiếp.

2) $BC^2 = 4MO \cdot MA$.

3) $\triangle ODE$ cân và $BG = 2EG$.

Bài V (0,5 điểm): Cho $x, y > 0$ và $x + y = 1$. Chứng minh: $\left(x + \frac{1}{x}\right)^2 + \left(y + \frac{1}{y}\right)^2 \geq \frac{25}{2}$.