TRƯỜNG ĐẠI HỌC SƯ PHẠM HÀ NỘI
TRƯỜNG THPT CHUYÊN

Đề thi gồm 01 trang

KỲ THI THỬ VÀO LỚP 10 THPT CHUYÊN NĂM 2021
LẦN 1
Môn thi: TOÁN
(Dùng cho thí sinh thi thử vào Chuyên Toán, Tin)
Thời gian làm bài: 150 phút (không kể thời gian giao đề)

Câu 1 (2 điểm). Cho x, y, z là ba số thực dương thoả mãn: $xyz(x+y+z)=1$. Chứng minh:

$$\sqrt{\left(x^2+\frac{1}{y^2}\right)\left(y^2+\frac{1}{z^2}\right)\left(z^2+\frac{1}{x^2}\right)}=(x+y)(y+z)(z+x).$$

Câu 2 (3 điểm)

1) Cho hai số thực không âm a, b thỏa mãn: $a+b\le\sqrt{2}$. Chứng minh:

$$\frac{a^2}{1+a^2}+\frac{b^2}{1+b^2}\le\frac{(a+b)^2}{1+(a+b)^2}$$

2) Tìm tất cả các số nguyên tố p, q thỏa mãn:

$$(q+p)^p=(q-p)^{2q-1}.$$

Câu 3 (1 điểm). Cho tập hợp S có các phần tử là các số thực, S chứa tất cả các số nguyên và đóng đối với các phép toán cộng và nhân, tức là với hai phần tử bất kì x, y thuộc S ta có $x+y$ và $x.y$ đều thuộc S. Biết rằng $\sqrt{2020}+\sqrt{2021}$ thuộc S, chứng minh $\sqrt{2020}-\sqrt{2021}$ thuộc S.

Câu 4 (3 điểm). Cho đường tròn (O) và dây cung AB cố định, không là đường kính. Điểm M thay đổi trên đoạn AB sao cho $M\ne A, M\ne B$ và $AM>MB$. Đường thẳng Δ vuông góc với OM tại M, cắt đường tròn (O) tại P và Q. Đường tròn đường kính AM cắt đường tròn (O) tại điểm thứ hai K $(K\ne A)$ và cắt đoạn thẳng PQ tại điểm thứ hai D $(D\ne M)$. Gọi S là giao điểm của AK với PQ, F là giao điểm của SB với đường tròn (O) $(F\ne B)$ và H là trực tâm của tam giác APQ. Chứng minh

a) Tứ giác $BMDF$ nội tiếp
b) Các điểm M, H, K thẳng hàng
c) Đường thẳng HF luôn đi qua một điểm cố định khi M thay đổi trên đoạn AB.

Câu 5 (1 điểm). Cho tập hợp $X=\{1;2;...;2022\}$.

a) Xét tập con M của X gồm 1012 phần tử. Chứng minh rằng luôn có hai phần tử a, b của M mà $a<b$ và b là bội của a.

b) Tìm số nguyên dương n lớn nhất sao cho với mọi tập con A của X có 1348 phần tử thì trong A có ít nhất n cặp $(a;b)$ mà $a<b$ và b là bội của a.

-----------------Hết-----------------