

Câu 1: (3,0 điểm)

1) Cho $P = \sqrt{7-4\sqrt{3}} + \sqrt{(a+3)\sqrt{a-3a-1}} : \left(\frac{a-4}{3(\sqrt{a-2})} - 1 \right)$ với $a \geq 0; a \neq 1; a \neq 4$.

Rút gọn biểu thức P .

2) Tìm tất cả các số thực x, y, z thỏa mãn điều kiện $2\sqrt{x} + 2\sqrt{y-x} + 3\sqrt{z-y} = \frac{1}{2}(z+17)$.

Câu 2: (5,0 điểm)

1) Giải phương trình $6x\sqrt{2x^2+7} = 6x^2 + 2x + 22 - 4\sqrt{2x^2+7}$.

2) Giải hệ phương trình $\begin{cases} xy^2 + 3x^2 = 2y \\ x^2y + y^2 = -2x \end{cases}$

Câu 3: (3,0 điểm)

1) Tính tổng tất cả các số nguyên x thỏa mãn $x^2 + x - a = 0$ với a là số nguyên tố.

2) Tìm nghiệm tổng quát nguyên dương của phương trình $(x+y)^2 + y + 3x = z^2 + 1$.

Câu 4: (7,0 điểm) Trên đường tròn (O) lấy ba điểm A, B, C sao cho tam giác ABC nhọn. Gọi AD, BE, CF là các đường cao của tam giác ABC ; đường thẳng EF cắt đường thẳng BC tại P . Qua D kẻ đường thẳng song song với đường thẳng EF cắt đường thẳng AC và AB lần lượt tại Q và R . M là trung điểm của BC .

1) Chứng minh tứ giác $BQCR$ là tứ giác nội tiếp.

2) Chứng minh hai tam giác EPM và DEM đồng dạng.

3) Giả sử BC là dây cung cố định không đi qua tâm O . A di động trên cung lớn BC của đường tròn (O) . Chứng minh đường tròn ngoại tiếp tam giác PQR luôn đi qua một điểm cố định.

Câu 5: (2,0 điểm)

1) Cho 2021 số tự nhiên từ 4 đến 2024 trên bảng, mỗi lần thay một hoặc một vài số bởi tổng các chữ số của nó cho đến khi trên bảng chỉ còn lại các số từ 1 đến 9. Hỏi cuối cùng, trên bảng có bao nhiêu số 3, bao nhiêu số 7?

2) Cho các số thực dương x, y, z thỏa mãn $x^3 + y^3 + z^3 = 24$. Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức

$$M = \frac{xyz + 2(x+y+z)^2}{xy + yz + zx} \cdot \frac{8}{xy + yz + zx + 1}$$

-----Hết-----