

Bài 1: (6 điểm)

1) Cho biểu thức $P = \frac{x^2 + x}{x^2 - 2x + 1} : \left(\frac{x+1}{x} + \frac{1}{x-1} + \frac{2-x^2}{x^2-x} \right)$

a) Tìm điều kiện xác định và rút gọn P

b) Tìm x để $P = \frac{-1}{2}$

2) Giải phương trình $|x| - 3 = x + 1$

Bài 2: (4 điểm)

1) Chứng minh rằng phương trình sau không có nghiệm nguyên: $x^2 - y^2 = 2010$

2) Tìm các số tự nhiên n để $(n^2 - 8)^2 + 36$ là số nguyên tố

Bài 3: (3 điểm)

Tìm giá trị nhỏ nhất và lớn nhất của biểu thức: $T = \frac{8x + 12}{x^2 + 4}$

Bài 4: (6 điểm)

Cho tam giác ABC vuông tại A ($AB < AC$), đường cao AH. Gọi M; N lần lượt là hình chiếu của H trên AB, AC. Đường thẳng qua A vuông góc với MN tại I, cắt BC tại K

1) Chứng minh: $AN.AC = AB.AM$

2) Chứng minh rằng K là trung điểm của BC.

3) Chứng minh: $AB^2 = BH.HC$ và $AM.BM + AN.NC \leq AK^2$

4) Tìm điều kiện của tam giác ABC để diện tích hình chữ nhật AMHN lớn nhất.

Bài 5: (1 điểm)

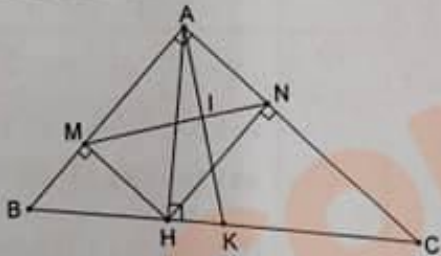
Chứng minh rằng với mọi số tự nhiên n ta có $5^{n+2} + 26.5^n + 8^{2n+1} \vdots 59$

HẾT

(Cán bộ coi thi không giải thích gì thêm)

ĐÁP ÁN + BIỂU ĐIỂM

Bài	Phần	Nội dung	Điểm
1	1a	$\text{ĐKXĐ: } \begin{cases} x \neq 0 \\ x \neq 1 \\ x \neq -1 \end{cases} \quad \text{Không có đk } x \neq -1 \text{ trừ } 0,25đ$ $P = \frac{x(x+1)}{(x-1)^2} : \left(\frac{(x+1)(x-1)}{x(x-1)} + \frac{x}{x(x-1)} + \frac{2-x^2}{x(x-1)} \right)$ $P = \frac{x(x+1)}{(x-1)^2} : \frac{x^2 - 1 + x + 2 - x^2}{x(x-1)}$ $P = \frac{x(x+1)}{(x-1)^2} : \frac{x+1}{x(x-1)} = \frac{x(x+1)}{(x-1)^2} \cdot \frac{x(x-1)}{x+1} = \frac{x^2}{x-1}$	0,5đ
			1đ
	1b	$P = \frac{-1}{2} \Leftrightarrow P = \frac{x^2}{x-1} = \frac{-1}{2} \text{ với } x \in \text{ĐKXĐ}$ $\Rightarrow 2x^2 = -x + 1 \Leftrightarrow 2x^2 + x - 1 = 0 \Leftrightarrow 2x^2 + 2x - x - 1 = 0$ $\Leftrightarrow (2x-1)(x+1) = 0 \Leftrightarrow x = \frac{1}{2} \text{ (TM ĐKXĐ)}$ <p>Hoặc $x = -1$ (không TM ĐKXĐ) (Nếu không loại $x = -1$ trừ 0,5đ)</p> <p>Vậy $P = \frac{-1}{2} \Leftrightarrow x = \frac{1}{2}$</p>	0,5đ
2		$ x-3 =x+1$ <ul style="list-style-type: none"> Với $x \geq 0$; pt đã cho trở thành: $x-3 =x+1$ (1) Với $x \geq 3$; (1) trở thành: $x-3=x+1$, vô nghiệm Với $0 \leq x < 3$; (1) có nghiệm $x=1$ (thỏa mãn) Với $x < 0$; pt đã cho trở thành: $-x-3 =x+1$ (2) Với $-3 \leq x < 0$; (2) trở thành: $x+3=x+1$, vô nghiệm Với $x < -3$; (2) có nghiệm $x=-2$ (không thỏa mãn) <p>Vậy phương trình đã cho có tập nghiệm $S = \{1\}$</p>	0,5đ
		Vô nghiệm	0,5đ
		Vô nghiệm	0,5đ
2	1	$x^2 - y^2 = 2010$ <p>Giả sử pt đã cho có nghiệm nguyên $(x_0; y_0)$ thì $x_0^2 - y_0^2 = 2010$</p> <p>Ta thấy: x_0^2 và y_0^2 chia cho 4 có số dư là 0 hoặc 1, nên $x_0^2 - y_0^2$ chia cho 4 có số dư là 0 hoặc 1 hoặc 3.</p> <p>Về phải 2010 chia cho 4 dư 2 (mâu thuẫn với điều giả sử).</p> <p>Vậy phương trình đã cho không có nghiệm nguyên.</p>	1đ
			0,5đ
			0,5đ
2		$(n^2 - 8)^2 + 36 = n^4 - 16n^2 + 100 = (n^2 + 10)^2 - 36n^2$ $= (n^2 + 10 - 6n)(n^2 + 10 + 6n)$	
	2		

		<p>Để $(n^2 - 8)^2 + 36$ là số nguyên tố, điều kiện cần là: $(n^2 + 10 - 6n) = 1$ và $(n^2 + 10 + 6n)$ là số nguyên tố.</p> <p>$(n^2 + 10 - 6n) = 1 \Leftrightarrow (n - 3)^2 = 0 \Leftrightarrow n = 3$</p> <p>Thử lại: Với $n = 3$ thì $(n^2 - 8)^2 + 36 = 37$ là số nguyên tố</p>	<p>1đ</p> <p>0,5đ</p> <p>0,5đ</p>
3		<p>$T = \frac{8x+12}{x^2+4} = \frac{(x^2+8x+16)-(x^2+4)}{x^2+4} = \frac{(x+4)^2}{x^2+4} - 1 \geq -1$ Với mọi x</p> <p>Mo đó $\min T = -1 \Leftrightarrow x = -4$</p> <p>$T = \frac{(4x^2+16)-(4x^2-8x+4)}{x^2+4} = 4 - \frac{4(x-1)^2}{x^2+4} \leq 4$ Với mọi x</p> <p>Mo đó $\max T = 4 \Leftrightarrow x = 1$</p>	<p>1đ</p> <p>0,5đ</p> <p>1đ</p> <p>0,5đ</p>
4	1	<p>Chứng minh: $\Delta ACB \sim \Delta HCA$</p> <p>Ta Có: $\Delta HCA \sim \Delta NHA$; $\Delta NHA = \Delta AMN$; Suy ra $\Delta AMN \sim \Delta ACB$</p> <p>$\frac{AN}{AB} = \frac{AM}{AC}$</p> <p>Suy ra: $AN.AC = AB.AM$ (đpcm)</p>	 <p>1đ</p> <p>1đ</p>
	2	Chứng minh: ΔAKC cân tại K suy ra: K là trung điểm của BC.	1đ
	3	<p>Ta có: $AB^2 + AC^2 = BC^2$</p> <p>suy ra $AH^2 + BH^2 + AH^2 + CH^2 = (BH + CH)^2$</p> <p>suy ra: $AH^2 = BH.CH$</p> <p>Mo đó $AB^2 = AH^2 + BH^2 = BH.CH + BH^2 = BH(CH + BH)$</p> <p>$AB^2 = BH.BC$</p> <p>Chứng minh tương tự ta được: $AM.BM = HM^2$; $AN.CN = HN^2$</p> <p>Mà $HM^2 + HN^2 = MN^2 = AH^2 \leq AK^2$</p>	<p>1đ</p> <p>1đ</p>
	4	<p>Diện tích hình chữ nhật AMHN lớn nhất khi và chỉ khi $AM = AN$.</p> <p>Vì $\Delta AMN \sim \Delta ACB$ nên $\frac{AN}{AB} = \frac{AM}{AC}$</p> <p>Suy ra $AB = AC$. Do đó khi tam giác ABC vuông cân tại A thì diện tích hình chữ nhật AMHN lớn nhất.</p>	1đ
5		<p>$5^{n+2} + 26.5^n + 8^{2n+1} = 51.5^n + 8.64^n = (59 - 8).5^n + 8.64^n$</p> <p>$= 59.5^n + 8(64^n - 5^n)$</p> <p>Vì $(64^n - 5^n) : (64 - 5)$ nên ta có điều phải chứng minh</p>	<p>0,5đ</p> <p>0,5đ</p>