SỞ GD&ĐT VĨNH PHÚC **ĐỀ THI HSG LẦN 2 CẤP TRƯỜNG NĂM HỌC 2020-2021**

TRƯỜNG THPT ĐỒNG ĐẬU **MÔN TOÁN 11**

Đề thi có 02 trang *Thời gian làm bài:180 phút,không kể thời gian phát đề*

Câu 1(2,0 *điểm*). Giải phương trình sau: $3\cos 2x + 2\sin(\frac{9\pi}{2} - x) - 5 = 0$

Câu 2(2,0 *điểm*). Với n là số nguyên dương thỏa mãn: $C_n^2 + A_n^3 = 765$. Tìm số hạng không chứa x trong khai triển: $(x^3 + \frac{2}{x^2})^n$

Câu 3(2,0 *điểm*). Cho dãy số (u_n) xác định như sau: $\begin{cases} u_1 = 2012 \\ u_{n+1} = 2012u_n^2 + u_n \end{cases} (n \in N^*)$

Tìm $\lim(\frac{u_1}{u_2} + \frac{u_2}{u_3} + \frac{u_3}{u_4} + ... + \frac{u_n}{u_{n+1}})$.

Câu 4 (2,0 *điểm*). Giải hệ phương trình $\begin{cases} x^3 + x^2(2 - y) + x - y(2x + 1) = 0 \\ 2x^2 + 3xy - 5 = 0 \end{cases}$.

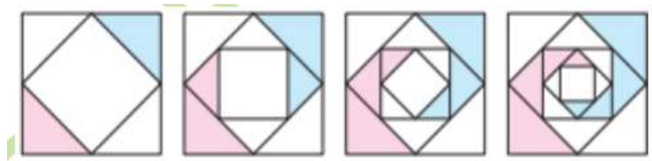
Câu 5 (2,0 *điểm*). Cho hình chóp *S.ABCD* có đáy *ABCD* là hình thang cân (*AD* // *BC*), *BC* = 2*a*, *AB* = *AD* = *DC* = *a* (*a* > 0). Mặt bên *SBC* là tam giác đều. Gọi *O* là giao điểm của *AC* và *BD*. Biết *SD* vuông góc với *AC*. Mặt phẳng (α) đi qua điểm *M* thuộc đoạn thẳng *OD* (*M* khác *O* và *D*) và song song với đường thẳng *SD* và *AC*. Xác định thiết diện của hình chóp *S.ABCD* cắt bởi mặt phẳng (α) biết *MD* = *x*. Tìm *x* để diện tích thiết diện lớn nhất.

Câu 6 (2,0 *điểm*). Trong mặt phẳng với hệ tọa độ Oxy, cho hình chữ nhật ABCD, có đỉnh $A(-3;1)$, đỉnh C nằm trên đường thẳng $\Delta: x - 2y - 5 = 0$. Trên tia đối của tia CD lấy điểm E sao cho $CE = CD$, biết $N(6;-2)$ là hình chiếu vuông góc của D lên đường thẳng BE. Xác định tọa độ các đỉnh còn lại của hình chữ nhật ABCD.

Câu 7 (2,0 điểm). Cho hình hộp ABCD.A’B’C’D’. Trên các đoạn thẳng AD’ và C’D lần lượt lấy hai điểm M, N sao cho đường thẳng MN song song với đường thẳng nối tâm của hình bình hành ABB’A’ và trung điểm của cạnh BC. Tính tỷ số $\frac{MN}{A'C}$.

Câu 8 (2,0 điểm). Cho dãy số {1; 2; 3;…; 2019} có bao nhiêu cách chọn ba số a,b,c khác nhau từ dãy số để ba số đó lập thành cấp số cộng.

Câu 9 (2,0 điểm). Một thợ thủ công muốn vẽ trang trí trên một hình vuông kích thước $4m\,x\,4m$, bằng cách vẽ một hình vuông mới với các đỉnh là trung điểm các cạnh của hình vuông ban đầu, và tô kín màu lên hai tam giác đối diện:(như hình vẽ). Quá trình vẽ và tô theo qui luật đó được lặp lại 5 lần. Tính số tiền nước sơn để người thợ thủ công đó hoàn thành trang trí hình vuông như trên?. Biết tiền nước sơn để sơn $1m^2$ là 50.000đ.



Câu 10 (2,0 điểm). Cho a,b,c là các số thực dương thoả mãn $abc=1$. Chứng minh bất đẳng thức

$$a^3+b^3+c^3+\frac{ab}{a^2+b^2}+\frac{bc}{b^2+c^2}+\frac{ca}{c^2+a^2}\ge\frac{9}{2}.$$

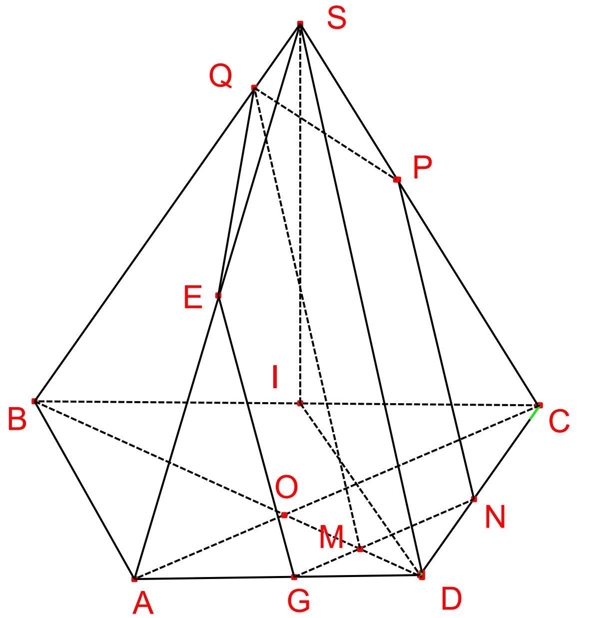
--------------------Hết-----------------

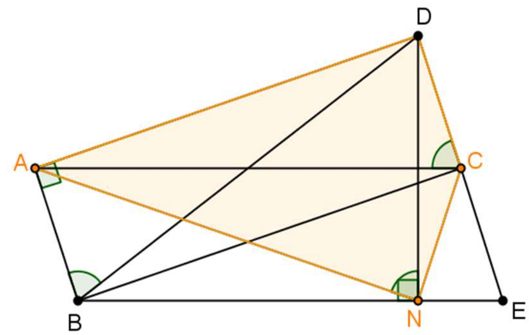
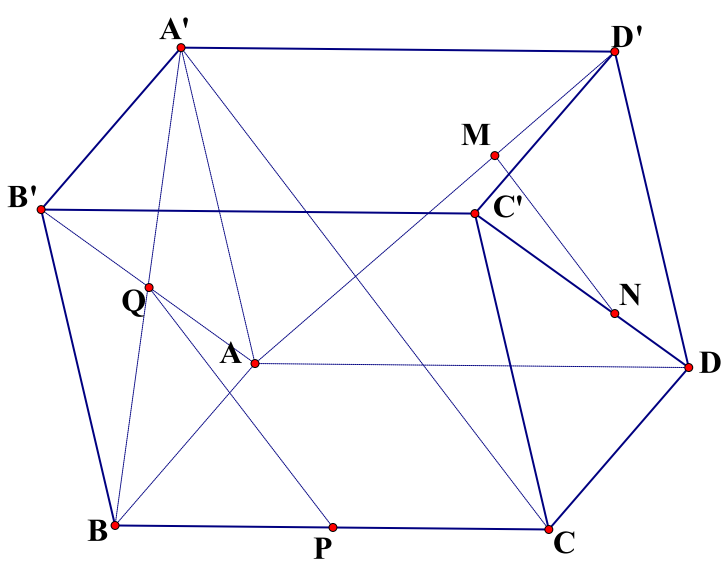
Thí sinh không được sử dụng máy tính cầm tay. Cán bộ coi thi không giải thích gì thêm.

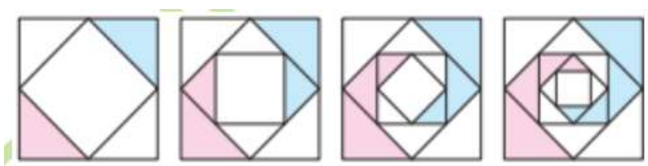
SỞ GD&ĐT VĨNH PHÚC
TRƯỜNG THPT ĐỒNG ĐẬU
Có 04 trang

ĐÁP ÁN ĐỀ THI HSG LẦN 1 CẤP TRƯỜNG
NĂM HỌC 2018-2019 MÔN TOÁN 10

Câu	Nội dung đáp án	Điểm
Câu 1	Giải phương trình sau: $3\cos 2x + 2\sin(\frac{9\pi}{2} - x) - 5 = 0$	**2,0 điểm**
	Phương trình đã cho tương đương với $3\cos 2x + 2\cos x - 5 = 0$	0,5
	$\Leftrightarrow 6\cos^2 x + 2\cos x - 8 = 0$	0,5
	$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \cos x = 1 \\ \cos x = \frac{-4}{3} \ (l) \end{array}\right.$	0,5
	$\cos x = 1 \Leftrightarrow x = k2\pi$, $k \in Z$ Phhương trình có một họ nghiệm	0,5
Câu 2	Với n là số nguyên dương thỏa mãn: $C_n^2 + A_n^3 = 765$. Tìm số hạng không chứa x ttrong khai triển: $(x^3 + \frac{2}{x^2})^n$	**2,0 điểm**
	Ta có: $C_n^2 + A_n^3 = 765 \Leftrightarrow n = 10$	0,75
	Xét số hạng $T_{k+1} = C_n^k (x^3)^{10-k} (\frac{2}{x^2})^k = C_n^k 2^k x^{10-k}$	0,25
	Khai triển không chứa x ứng với $30 - 5k = 0 \Leftrightarrow k = 6$	0,5
	Số hạng cần tìm $T_7 = C_{10}^6 2^6$	0,5
Câu 3	Cho dãy số (u_n) xác định như sau: $\begin{cases} u_1 = 2012 \\ u_{n+1} = 2012u_n^2 + u_n \end{cases} (n \in N^*)$ Tìm $\lim(\frac{u_1}{u_2} + \frac{u_2}{u_3} + \frac{u_3}{u_4} + ... + \frac{u_n}{u_{n+1}})$.	**2,0 điểm**
	Ta có : $u_{n+1} - u_n = 2012u_n^2 > 0 \ \forall n$. Suy ra dãy (u_n) tăng.	0,25
	- Giả sử có giới hạn là a thì : $a = 2012a^2 + a \Rightarrow a = 0 > 2012$ (vô lý) nên $\lim u_n = +\infty$	0,75
	- ta có : $\frac{u_n}{u_{n+1}} = \frac{u_n^2}{u_{n+1}u_n} = \frac{(u_{n+1} - u_n)}{2012u_{n+1}u_n} = \frac{1}{2012}(\frac{1}{u_n} - \frac{1}{u_{n+1}})$	0,5
	Vậy : $S = \frac{1}{2012}.\lim_{n\to+\infty}(\frac{1}{u_1} - \frac{1}{u_{n+1}}) = \frac{1}{2012^2}$.	0,5
Câu 4	Giải hệ phương trình $\begin{cases} x^3 + x^2(2-y) + x - y(2x+1) = 0 \\ 2x^2 + 3xy - 5 = 0 \end{cases}$.	**2,0 điểm**
	Từ $x^3 + x^2(2-y) + x - y(2x+1) = 0 \Leftrightarrow (x-y)(x+1)^2 = 0$	0,75
	TH1: x = y thế vào pt : $5x^2 - 5 = 0 \Leftrightarrow x = \pm 1 \Rightarrow y = \pm 1$	0,5
	TH2: $x = -1 \Rightarrow y = -1$	0,5
	Vậy nghiệm của hệ (1;1), $(-1;-1)$	0,25

Câu 5	Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình thang cân (AD // BC), $BC = 2a$, $AB = AD = DC = a$ ($a > 0$). Mặt bên SBC là tam giác đều. Gọi O là giao điểm của AC và BD. Biết SD vuông góc với AC. Mặt phẳng (α) đi qua điểm M thuộc đoạn thẳng OD (M khác O và D) và song song với đường thẳng SD và AC. Xác định thiết diện của hình chóp $S.ABCD$ cắt bởi mặt phẳng (α) biết $MD = x$. Tìm x để diện tích thiết diện lớn nhất.	**2,0 điểm**
		
	Từ M kẻ hai đường thẳng lần lượt song song với SD, AC chúng cắt theo thứ tự SB tại Q và AB tại G, AC tại N. Từ G kẻ đường thẳng song song SD, cắt SA tại E,từ N kẻ đường thẳng song song với SD cắt SC tại P. Ta được thiết diện là ngũ giác GNPQE.	0,25
	Gọi I là trung điểm của BC . Tứ giác ADIC là hình thoi, suy ra AC ⊥ ID. Suy ra AC ⊥ (SID) . Suy ra SI ⊥ (ABCD). Ta có: $SD = \sqrt{SI^2 + ID^2} = 2a$	0,25
	Ta tính được $BD = a\sqrt{3}$ nên tính được $EG = NP = 2\left(a - x\sqrt{3}\right), QM = 2\left(a - \frac{x}{\sqrt{3}}\right)$, $GN = 3x$	0,75
	Tứ giác EGMQ và MNPQ là hai hình thang vuông đường cao lần lượt là GM và NM nên $S_{MNPQE} = 4x\left(3a - 2\sqrt{3}x\right)$	0,5
	Max $S_{MNPQE} = \frac{3\sqrt{3}}{2}a^2$ tại $x = \frac{a\sqrt{3}}{4}$	0,25
Câu 6	Trong mặt phẳng với hệ tọa độ Oxy, cho hình chữ nhật ABCD, có đỉnh $A(-3;1)$, đỉnh C nằm trên đường thẳng $\Delta : x - 2y - 5 = 0$. Trên tia đối của tia CD lấy điểm E sao cho $CE = CD$, biết $N(6;-2)$ là hình chiếu vuông góc của D lên đường thẳng BE. Xác định tọa độ các đỉnh còn lại của hình chữ nhật ABCD.	**2,0 điểm**

	Tứ giác ADBN nội tiếp $\Rightarrow \widehat{AND}=\widehat{ABD}$ và $\widehat{ABD}=\widehat{ACD}$ (do ABCD là hình chữ nhật). Suy ra $\widehat{AND}=\widehat{ACD}$ hay tứ giác ANCD nội tiếp được một đường tròn, mà $\widehat{ADC}=90^0 \Rightarrow \widehat{ANC}=90^0 \Rightarrow AN\perp CN$. 	0,75
	Giả sử $C(2c+5;c)$, từ $\overrightarrow{AN}.\overrightarrow{CN}=0\Rightarrow\ 3(1-2c)+(2+c)=0\Rightarrow c=1\Rightarrow \boxed{C(7;1)}$	0,25
	Tứ giác ABEC là hình bình hành, suy ra $AC//BE$. Đường thẳng NE qua N và song song với AC nên có phương trình $y+2=0$.	0,25
	Giả sử $B(b;-2)$, ta có $\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{CB}=0\Rightarrow b^2-4b-12=0\Rightarrow \left[\begin{array}{l} b=6\rightarrow B\equiv N(\text{loại}) \\ b=-2\rightarrow \boxed{B(-2;-2)}\end{array}\right.$	0,5
	Từ đó dễ dàng suy ra $\boxed{D(6;4)}$	0,25
Câu 7	Cho hình hộp ABCD.A’B’C’D’. Trên các đoạn thẳng AD’ và C’D lần lượt lấy hai điểm M, N sao cho đường thẳng MN song song với đường thẳng nối tâm của hình bình hành ABB’A’ và trung điểm của cạnh BC. Tính tỷ số $\frac{MN}{A'C}$.	**2,0 điểm**
		
	Gọi P là trung điểm của BC, Q là tâm của hình bình hành ABB’A’. Xét tam giác A’BC, ta có PQ là đường trung bình nên PQ || A’C suy ra MN ||A’C.	0,25
	Đặt $\overrightarrow{AB}=\vec{x}, \overrightarrow{AD}=\vec{y}, \overrightarrow{AA'}=\vec{z},\ \overrightarrow{AM}=m.\overrightarrow{AD'}, \overrightarrow{C'N}=m.\overrightarrow{C'D}$. Ta có $\overrightarrow{MN}=\overrightarrow{MA'}+\overrightarrow{AC'}+\overrightarrow{C'N}=-m\left(\overrightarrow{AD'}\right)+\left(\vec{x}+\vec{y}+\vec{z}\right)+n\overrightarrow{C'D}$	0,,75

	$=-m\left(\vec{y}+\vec{z}\right)+\left(\vec{x}+\vec{y}+\vec{z}\right)+n\left(-\vec{x}-\vec{z}\right)=\left(1-n\right)\vec{x}+\left(1-m\right)\vec{y}+\left(1-m-n\right)\vec{z}$	
	$\overrightarrow{A'C}=\overrightarrow{A'B'}+\overrightarrow{A'D'}+\overrightarrow{A'A}=\vec{x}+\vec{y}-\vec{z}$. Do MN $\parallel$ A’C nên $\overrightarrow{MN}=k\overrightarrow{A'C}\Leftrightarrow\begin{cases}1-n=k\\1-m=k\\1-m-n=-k\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}m=\dfrac{2}{3}\\n=\dfrac{2}{3}\\k=\dfrac{1}{3}\end{cases}$	0,75
	Do đó $\overrightarrow{MN}=\frac{1}{3}\overrightarrow{A'C}\Rightarrow\frac{MN}{A'C}=\frac{1}{3}$. Vậy $\frac{MN}{A'C}=\frac{1}{3}$.	0,25
Câu 8	Cho dãy số {1; 2; 3;…; 2019} có bao nhiêu cách chọn ba số a,b,c khác nhau từ dẫy số để ba số đó lập thành cấp số cộng.	**2,0 điểm**
	Gọi công sai là d ta có ba số a,b,c tương ứng là a, a + d, a + 2d nên c - a= 2d => c= a + 2d	0,25
	Mỗi cách chọn a sẽ cho một bộ số thỏa mãn, theo đề bài có: c ≤ 2019 => a ≤ 2019 – 2d	0,25
	Nếu d= 1 thì a ≤ 2017, vậy có 2017 cách chọn a, hay có 2017 cách chọn ba số a,b,c là CSC Nếu d = 2 thì a ≤ 2015 => có 2015 cách chọn ba số a,b,c lập thành cấp số cộng .... Nếu d = 1009 thì a ≤ 1 nên có 1 cách chọn ba số a,b,c	1,0
	Vậy số cách chọn ba số lập thành cấp số cộng là 2017 + 2015 + … + 1 = 1018081	0,5
Câu 9	Một thợ thủ công muốn vẽ trang trí trên một hình vuông kích thước $4m\,x\,4m$, bằng cách vẽ một hình vuông mới với các đỉnh là trung điểm các cạnh của hình vuông ban đầu, và tô kín màu lên hai tam giác đối diện:(như hình vẽ). Quá trình vẽ và tô theo qui luật đó được lặp lại 5 lần. Tính số tiền nước sơn để người thợ thủ công đó hoàn thành trang trí hình vuông như trên?. Biết tiền nước sơn để sơn $1m^2$ là 50.000đ. 	**2,0 điểm**
	Gọi S_i là tổng diện tích tam giác được tô sơn màu ở lần vẽ hình vuông thứ $i\left(1\le i\le 5; i\in N\right)$ và S là diện tích hình vuông ban đầu. Ta có: $S_1=\frac{1}{2}.\left(\frac{1}{2}.S\right);S_2=\frac{1}{2^2}.\left(\frac{1}{2}.S\right);S_3=\frac{1}{2^3}.\left(\frac{1}{2}.S\right);S_4=\frac{1}{2^4}.\left(\frac{1}{2}.S\right);S_5=\frac{1}{2^5}.\left(\frac{1}{2}.S\right)$	1,0
	Tổng diện tích cần sơn là :$\left(\frac{1}{4}+\frac{1}{8}+\frac{1}{16}+\frac{1}{32}+\frac{1}{64}\right)S=\frac{31}{64}S=\frac{31}{4}$ (m^2)	0,75
	Số tiền để người thợ thủ công đó hoàn thành trang trí hình vuông như trên là : $\frac{31}{4}$. 50000 = 387500đ	0,25

Câu 10	Cho a,b,c là các số thực dương thoả mãn $abc=1$. Chứng minh bất đẳng thức $$a^3+b^3+c^3+\frac{ab}{a^2+b^2}+\frac{bc}{b^2+c^2}+\frac{ca}{c^2+a^2}\ge\frac{9}{2}.$$	
	Ta có $0\le(a-b)^4=a^4-4a^3b+6a^2b^2-4ab^3+b^4\Leftrightarrow a^4+b^4+2a^2b^2\ge 4ab(a^2-ab+b^2)\Leftrightarrow$ $\Leftrightarrow(a^2+b^2)^2\ge 4ab(a^2-ab+b^2)\Leftrightarrow\frac{a^2-ab+b^2}{a^2+b^2}\le\frac{a^2+b^2}{4ab}\Leftrightarrow 1-\frac{ab}{a^2+b^2}\le\frac{1}{4}\left(\frac{a}{b}+\frac{b}{a}\right)$	0,75
	Tương tự có $1-\frac{bc}{b^2+c^2}\le\frac{1}{4}\left(\frac{b}{c}+\frac{c}{b}\right)$; $1-\frac{ca}{c^2+a^2}\le\frac{1}{4}\left(\frac{c}{a}+\frac{a}{c}\right)$.	0,25
	Do đó, cộng theo vế các bất đẳng thức trên và sử dụng bất đẳng thức Schur cùng giả thiết $abc=1$ ta được $3-\left(\frac{ab}{a^2+b^2}+\frac{bc}{b^2+c^2}+\frac{ca}{c^2+a^2}\right)\le\frac{1}{4}\left(\frac{b+c}{a}+\frac{c+a}{b}+\frac{a+b}{c}\right)$ $=\frac{bc(b+c)+ca(c+a)+ab(a+b)}{4abc}=\frac{bc(b+c)+ca(c+a)+ab(a+b)}{4}$ $\le\frac{1}{4}(a^3+b^3+c^3+3abc)=\frac{1}{4}(a^3+b^3+c^3+3)$ Hay $a^3+b^3+c^3+4\left(\frac{ab}{a^2+b^2}+\frac{bc}{b^2+c^2}+\frac{ca}{c^2+a^2}\right)\ge 9\ (1)$	0,5
	Mặt khác $3(a^3+b^3+c^3)\ge 3.3\sqrt[3]{(abc)^3}=9\ (2)$ Từ (1) và (2) suy ra $4\left[a^3+b^3+c^3+\frac{ab}{a^2+b^2}+\frac{bc}{b^2+c^2}+\frac{ca}{c^2+a^2}\right]\ge 18$ Do vậy $a^3+b^3+c^3+\frac{ab}{a^2+b^2}+\frac{bc}{b^2+c^2}+\frac{ca}{c^2+a^2}\ge\frac{9}{2}$ Dấu đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $a=b=c=1$.	0,5