TRƯỜNG THPT ĐỒNG ĐẬU

KỲ THI CHỌN HỌC SINH GIỎI CẤP TRƯỜNG LẦN 2
NĂM HỌC: 2020 - 2021

Số báo danh
....

Môn thi: TOÁN - Lớp 10 THPT

Thời gian: **180 phút** (*không kể thời gian giao đề*)

Đề thi có 01 trang - gồm 10 câu

Câu 1. Tìm tập xác địnhcủa hàm số $y=\sqrt{\frac{10-x}{5+x}-\frac{1}{2}}$

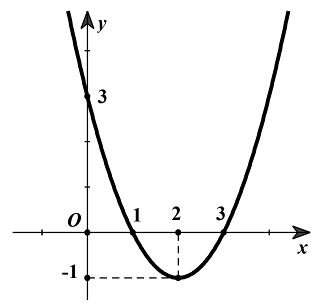
Câu 2. Cho phương trình $\left(x^2+ax+1\right)^2+a\left(x^2+ax+1\right)+1=0\,(1)$ với a là tham số.

a. Giải phương trình với $a=-2$

b. Khi phương trình (1) có nghiệm thực duy nhất. Chứng minh rằng $a>2$.

Câu 3. Cho hàm số $y=f(x)=ax^2+bx+c$ có đồ thị như hình vẽ bên.

Tìm các giá trị nguyên của tham số m để phương trình $f^2(|x|)+(m-2)f(|x|)+m-3=0$ có 6 nghiệm phân biệt



Câu 4. Giải phương trình

$$3\sqrt{3x-2}+6\sqrt{x-1}+7x-10+4\sqrt{3x^2-5x+2}=0$$

Câu 5. Giải bất phương trình $\sqrt{x-2}-2\ge\sqrt{2x-5}-\sqrt{x+1}$.

Câu 6. Giải hệ phương trình: $\begin{cases}5x^2y-4xy^2+3y^3-2(x+y)=0\\x^2+y^2=2\end{cases}$

Câu 7. Cho hình chữ nhật $ABCD$ có $AB=2AD$, $BC=a$. Tính giá trị nhỏ nhất của độ dài vectơ $\vec{u}=\overrightarrow{MA}+2\overrightarrow{MB}+3\overrightarrow{MC}$, trong đó M là điểm thay đổi trên đường thẳng BC.

Câu 8. Cho tam giác ABC vuông tại A, G là trọng tâm tam giác ABC. Tính độ dài cạnh AB biết cạnh $AC=a$, và góc giữa hai véc tơ $\overrightarrow{GB}$ và $\overrightarrow{GC}$ là nhỏ nhất.

Câu 9. Cho tam giác ABC cân tại A, nội tiếp đường tròn tâm O. Gọi D là trung điểm của AB, E là trọng tâm tam giác ADC. Chứng minh rằng $OE\perp CD$.

Câu 10. Với $x\in(0;1)$, hãy tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức $P=\frac{\sqrt{1-x}(1+\sqrt{1-x})}{x}+\frac{5}{\sqrt{1-x}}$.

--------------------Hết-----------------

Thí sinh không được sử dụng máy tính cầm tay. Cán bộ coi thi không giải thích gì thêm.

SỞ GD&ĐT VĨNH PHÚC

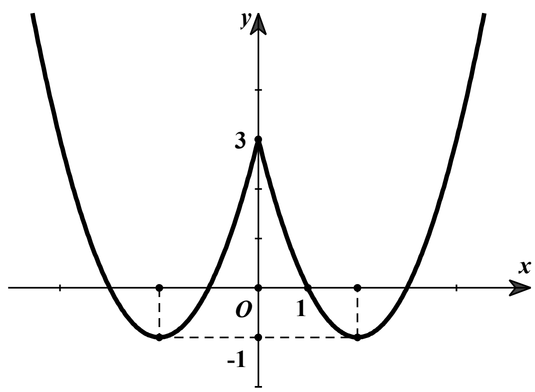
TRƯỜNG THPT ĐỒNG ĐẬU

Có 06 trang

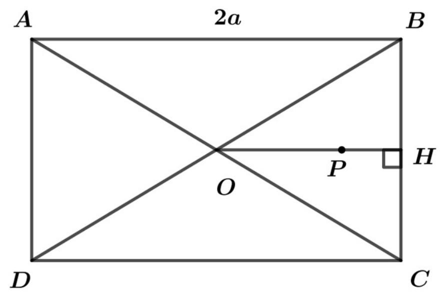
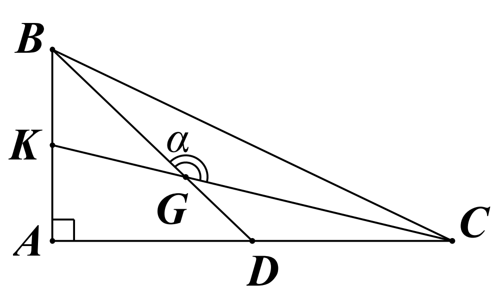
ĐÁP ÁN ĐỀ THI HSG LẦN 2 CẤP TRƯỜNG

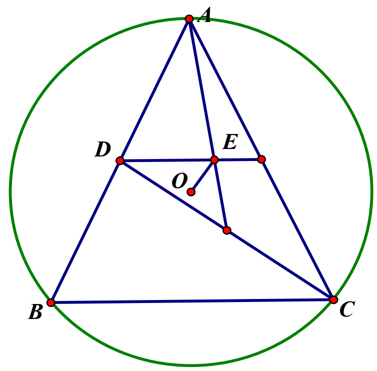
NĂM HỌC 2020-2021 MÔN TOÁN 10

Câu	**Nội dung**	**Điểm**
1	Tìm tập xác địnhcủa hàm số y = $\sqrt{\frac{10-x}{5+x}-\frac{1}{2}}$	**2,0**
	Hàm số xác định khi và chỉ khi $\frac{10-x}{5+x}-\frac{1}{2}\ge 0$ Hoặc $\begin{cases}\frac{10-x}{5+x}-\frac{1}{2}\ge 0\\ x+5\ne 0\end{cases}$	*0,5*
	$\Leftrightarrow \frac{20-2x-5-x}{2(5+x)}\ge 0 \Leftrightarrow \frac{3(5-x)}{2(5+x)}\ge 0 \Leftrightarrow \begin{cases}(5-x)(5+x)\ge 0\\ x+5\ne 0\end{cases}$.	*0,5*
	$\Leftrightarrow -5<x\le 5$	*0,5*
	Vậy tập xác định của hàm số là $D=(-5;5]$.	*0,5*
2	Cho phương trình $\left(x^2+ax+1\right)^2+a\left(x^2+ax+1\right)+1=0\,(1)$ với a là tham số. a, Giải phương trình với $a=-2$ b, Khi phương trình (1) có nghiệm thực duy nhất. Chứng minh rằng $a>2$.	**2,0**
	a, với $a=-2$ phương trình (1) thành $\left(x^2-2x+1\right)^2-2\left(x^2-2x+1\right)+1=0$ $\Leftrightarrow (x-1)^4-2(x-1)^2+1=0$	*0,5*
	$\Leftrightarrow (x-1)^2=1$ $\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}x=0\\ x=2\end{array}\right.$	*0,5*
	b, Xét phương trình $\left(x^2+ax+1\right)^2+a\left(x^2+ax+1\right)+1=0\quad(1)$ Đặt $t=x^2+ax+1$, khi đó $x^2+ax+1-t=0\quad(2)$ và phương trình đã cho trở thành: $t^2+at+1=0\quad(3)$. Phương trình (1) có nghiệm khi a và t thỏa mãn: $a^2-4\ge 0$ và $a^2-4+4t\ge 0$. $a^2-4\ge 0 \Leftrightarrow a\le -2$ hay $a\ge 2$.	*0,5*

	Nếu $a \le -2$ thì (3) có nghiệm $t > 0,$ khi đó $a^2 - 4 + 4t > 0,$ suy ra (2) có hai nghiệm phân biệt, mâu thuẫn với giả thiết (1) có nghiệm duy nhất. Nếu $a = 2$ thì phương trình (3) có nghiệm $t = -1,$ khi đó điều kiện $a^2 - 4 + 4t \ge 0$ không được thỏa mãn. Vậy $a > 2$.	*0,5*
3		**2,0**
	Ta có: $f^2(\lvert x\rvert) + (m-2)f(\lvert x\rvert) + m - 3 = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} f(\lvert x\rvert) = -1 \\ f(\lvert x\rvert) = 3 - m \end{array}\right.$.	*0,5*
	Từ đồ thị hàm số $y = f(x)$ ta suy ra đồ thị hàm số $y = f(\lvert x\rvert)$ như sau: 	*0,5*
	+ Phương trình $f(\lvert x\rvert) = -1$ có hai nghiệm phân biệt	*0,25*
	Để phương trình đã cho có 6 nghiệm phân biệt thì phương trình $f(\lvert x\rvert) = 3 - m$ phải có 4 nghiệm phân biệt	*0,25*
	$\Leftrightarrow -1 < 3 - m < 3 \Leftrightarrow 0 < m < 4$.	*0,25*
	Kết hợp m là số nguyên nên $m \in \{1;2;3\}$.	*0,25*
4	Giải phương trình: $3\sqrt{3x-2} + 6\sqrt{x-1} + 7x - 10 + 4\sqrt{3x^2 - 5x + 2} = 0$	**2,0**
	ĐKXĐ: $x \ge 1$ Ta có: $3\sqrt{3x-2} + 6\sqrt{x-1} + 7x - 10 + 4\sqrt{3x^2 - 5x + 2} = 0$ $\Leftrightarrow 3\left(\sqrt{3x-2} + 2\sqrt{x-1}\right) + (3x-2) + 2.\sqrt{3x-2}.2\sqrt{x-1} + 4(x-1) - 4 = 0$ $\Leftrightarrow \left(\sqrt{3x-2} + 2\sqrt{x-1}\right)^2 + 3\left(\sqrt{3x-2} + 2\sqrt{x-1}\right) - 4 = 0$	*0,5*
	$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \sqrt{3x-2} + 2\sqrt{x-1} = 1 \\ \sqrt{3x-2} + 2\sqrt{x-1} = -4\ (VN) \end{array}\right.$	*0,5*

	$\Leftrightarrow \sqrt{3x-2}+2\sqrt{x-1}=1$ $\Leftrightarrow \dfrac{3(x-1)}{\sqrt{3x-2}+1}+2\sqrt{x-1}=0$ $\Leftrightarrow \sqrt{x-1}\left(\dfrac{3\sqrt{x-1}}{\sqrt{3x-2}+1}+2\right)=0\ (1)$	*0,5*
	Vì $\dfrac{3\sqrt{x-1}}{\sqrt{3x-2}+1}+2>0\ \forall x\geq 1$ nên $(1)\Leftrightarrow \sqrt{x-1}=0 \Leftrightarrow x=1$ (thỏa mãn). Vậy phương trình đã cho có nghiệm duy nhất $x=1$.	*0,5*
5	Giải bất phương trình $\sqrt{x-2}-2\geq \sqrt{2x-5}-\sqrt{x+1}.$	**2,0**
	Điều kiện xác định: $x\geq \dfrac{5}{2}.$ Bất phương trình tương đương: $\sqrt{x-2}+\sqrt{x+1}\geq \sqrt{2x-5}+2.$	*0,5*
	$\Leftrightarrow 2x-1+2\sqrt{(x-2)(x+1)}\geq 2x-1+4\sqrt{2x-5}.$	*0,5*
	$\Leftrightarrow x^2-9x+18\geq 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x\geq 6 \\ x\leq 3 \end{array}\right.$.	*0,5*
	$\Leftrightarrow x^2-9x+18\geq 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x\geq 6 \\ x\leq 3 \end{array}\right.$. Vậy nghiệm của bất phương trình là $x\geq 6$ hoặc $\dfrac{5}{2}\leq x\leq 3.$	*0,5*
6	Giải hệ phương trình: $\begin{cases} 5x^2y-4xy^2+3y^3-2(x+y)=0 \\ x^2+y^2=2 \end{cases}$	**2,0**
	Hệ đã cho $\Leftrightarrow \begin{cases} 5x^2y-4xy^2+3y^3-(x^2+y^2)(x+y)=0 \\ x^2+y^2=2 \end{cases}$	0,25
	$\Leftrightarrow \begin{cases} 4x^2y-5xy^2+2y^3-x^3=0\ (*) \\ x^2+y^2=2 \end{cases}$ Ta thấy x = 0 không là nghiệm của hệ nên từ PT (*) đặt: $t=\dfrac{y}{x}$ ta được PT:	0,25
	$2t^3-5t^2+4t-1=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} t=1 \\ t=\dfrac{1}{2} \end{array}\right.$	0,25
	Khi t = 1 ta có: $\begin{cases} y=x \\ x^2+y^2=2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=1 \\ y=1 \end{cases} \vee \begin{cases} x=-1 \\ y=-1 \end{cases}$	0,5

	Khi $t=\frac{1}{2}$ ta có: $\begin{cases} y=\frac{1}{2}x \\ x^2+y^2=2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=\frac{2\sqrt{2}}{\sqrt{5}} \\ y=\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{5}} \end{cases} \vee \begin{cases} x=-\frac{2\sqrt{2}}{\sqrt{5}} \\ y=-\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{5}} \end{cases}$	0,5
	Vậy hệ đã cho có 4 nghiệm $(x;y)$ là $(1;1);(-1;-1);\left(\frac{2\sqrt{2}}{\sqrt{5}};\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{5}}\right);\left(\frac{-2\sqrt{2}}{\sqrt{5}};\frac{-\sqrt{2}}{\sqrt{5}}\right)$	0,25
7	Cho hình chữ nhật $ABCD$ có $AB=2AD$, $BC=a$. Tính giá trị nhỏ nhất của độ dài vectơ $\vec{u}=\overrightarrow{MA}+2\overrightarrow{MB}+3\overrightarrow{MC}$, trong đó M là điểm thay đổi trên đường thẳng BC.	**2,0**
	 $AB=2AD=2BC=2a$. $AC\cap BD=0$ (trung điểm của AC, BD). $\vec{u}=\overrightarrow{MA}+2\overrightarrow{MB}+3\overrightarrow{MC}=\left(\overrightarrow{MA}+\overrightarrow{MC}\right)+2\overrightarrow{MB}+2\overrightarrow{MC}$	*0,5*
	$=2\overrightarrow{MD}+2\overrightarrow{MB}+2\overrightarrow{MC}=6\overrightarrow{MP}$ (với P là trọng tâm ΔOBC).	*0,5*
	$\left\|\vec{u}\right\|_{\min} \Leftrightarrow 6MP_{\min} \Leftrightarrow PM\perp BC$ tại M.	*0,5*
	Vì ΔOBC cân tại O, nên P thuộc trung tuyến OH và $\min\left\|\vec{u}\right\|=6PH=6.\frac{1}{3}OH=2Oh=2a$ (Khi $M\equiv H$).	*0,5*
8	Cho tam giác ABC vuông tại A, G là trọng tâm tam giác ABC. Tính độ dài cạnh AB biết cạnh $AC=a$, và góc giữa hai véc tơ $\overrightarrow{GB}$ và $\overrightarrow{GC}$ là nhỏ nhất.	**2,0**
	 Gọi K,D lần lượt là trung điểm AB,AC. Gọi α là góc giữa hai véc tơ $\overrightarrow{GB}$ và $\overrightarrow{GC}$. Ta có: $\cos\alpha=\cos\left(\overrightarrow{GB},\overrightarrow{GC}\right)=\cos\left(\overrightarrow{DB},\overrightarrow{KC}\right)$	*0,5*

<table>
<tr><td rowspan="3"></td><td>$= \dfrac{\overrightarrow{DB}.\overrightarrow{KC}}{DB.KC} = \dfrac{\overrightarrow{BD}.\overrightarrow{CK}}{BD.CK} = \dfrac{\left(\overrightarrow{BA}+\overrightarrow{BC}\right)\left(\overrightarrow{CA}+\overrightarrow{CB}\right)}{4BD.CK}$
$= \dfrac{\overrightarrow{BA}.\overrightarrow{CA}+\overrightarrow{BC}.\left(\overrightarrow{CA}-\overrightarrow{BA}\right)-\overrightarrow{BC}^2}{4BD.CK} = -\dfrac{BC^2}{2BD.CK}$ (Do $BA \perp CA$)</td><td>0,5</td></tr>
<tr><td>$2BD.CK \le BD^2 + CK^2 = \dfrac{1}{4}\left(\overrightarrow{BA}+\overrightarrow{BC}\right)^2 + \dfrac{1}{4}\left(\overrightarrow{CA}+\overrightarrow{CB}\right)^2$
$= \dfrac{1}{4}\left[AB^2 + AC^2 + 2BC^2 + 2\overrightarrow{BA}.\overrightarrow{BC} + 2\overrightarrow{CA}.\overrightarrow{CB}\right]$
$= \dfrac{1}{4}\left[AB^2 + AC^2 + 2BC^2 + 2BA^2 + 2CA^2\right]$ (Theo công thức hình chiếu véc tơ)
$= \dfrac{5}{4}BC^2$.</td><td>0,5</td></tr>
<tr><td>Suy ra $\cos\alpha \le -\dfrac{4}{5}$. Dấu bằng xảy ra khi $BD = CK \Leftrightarrow AB = AC = a$.
Ta có góc α nhỏ nhất khi $\cos\alpha$ lớn nhất bằng $-\dfrac{4}{5}$. Khi đó $AB = a$.</td><td>0,5</td></tr>
<tr><td rowspan="6">9</td><td>Cho tam giác ABC cân tại A, nội tiếp đường tròn tâm O. Gọi D là trung điểm của AB , E là trọng tâm tam giác ADC. Chứng minh rằng $OE \perp CD$</td><td>2,0</td></tr>
<tr><td>
</td><td></td></tr>
<tr><td>Ta có: $\overrightarrow{CD} = \dfrac{1}{2}\left(\overrightarrow{CA}+\overrightarrow{CB}\right) = \dfrac{1}{2}\left(\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OB}-2\overrightarrow{OC}\right)$
$\overrightarrow{OE} = \dfrac{1}{3}\left(\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OD}+\overrightarrow{OC}\right) = \dfrac{1}{3}\left(\overrightarrow{OA}+\dfrac{1}{2}\left(\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OB}\right)+\overrightarrow{OC}\right) = \dfrac{1}{6}\left(3\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OB}+2\overrightarrow{OC}\right)$</td><td>0,5</td></tr>
<tr><td>Do đó:
$\overrightarrow{CD}.\overrightarrow{OE} = \dfrac{1}{12}\left(\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OB}-2\overrightarrow{OC}\right).\left(3\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OB}+2\overrightarrow{OC}\right)$
$\Leftrightarrow 12\overrightarrow{CD}.\overrightarrow{OE} = 3OA^2 + OB^2 - 4OC^2 + 4\overrightarrow{OA}.\overrightarrow{OB} - 4\overrightarrow{OA}.\overrightarrow{OC}$</td><td>0,5</td></tr>
<tr><td>$\Leftrightarrow 12\overrightarrow{CD}.\overrightarrow{OE} = 4.\overrightarrow{OA}\left(\overrightarrow{OB}-\overrightarrow{OC}\right) = 4.\overrightarrow{OA}.\overrightarrow{CB} = 0$
(Vì ΔABC cân tại A có O là tâm đường tròn ngoại tiếp nên $OA \perp BC$)</td><td>0,5</td></tr>
<tr><td>Do đó $\overrightarrow{CD}.\overrightarrow{OE} = 0 \Leftrightarrow CD \perp OE$ (điều phải chứng minh)</td><td>0,5</td></tr>
<tr><td>10</td><td>Với $x \in (0;1)$, hãy tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức</td><td>2,0</td></tr>
</table>

	$P=\dfrac{\sqrt{1-x}(1+\sqrt{1-x})}{x}+\dfrac{5}{\sqrt{1-x}}$.	
	Đặt $t=\sqrt{1-x}$, $0<t<1$ ta được $P=\dfrac{t}{1-t}+\dfrac{5}{t}=\dfrac{t}{1-t}+\dfrac{5\left(1-t\right)}{t}+5$	*0,5*
	Áp dụng BĐT Cô si, ta có $P=\dfrac{t}{1-t}+\dfrac{5\left(1-t\right)}{t}+5\geq 2\sqrt{5}+5$.	*0,5*
	Dấu "=" xảy ra khi và chỉ khi $t=\dfrac{5-\sqrt{5}}{4}$.	*0,5*
	Vậy $\underset{(0;1)}{Min}P=2\sqrt{5}+5$ khi $x=\dfrac{-7+5\sqrt{5}}{8}$	*0,5*

---------------------Hết------------------