SỞ GIÁO DỤC VÀ ĐÀO TẠO
NGHỆ AN

ĐỀ CHÍNH THỨC

KÌ THI CHỌN HỌC SINH GIỎI TỈNH LỚP 9
NĂM HỌC 2020 - 2021
Môn thi: **TOÁN – BẢNG A**
Thời gian: **150 phút** *(không kể thời gian giao đề)*

Câu 1 (3,0 điểm).

a) Tìm tất cả các giá trị nguyên của a để $A = a^2 + 4a + 2021$ là một số chính phương.

b) Cho đa thức $P(x)$ với các hệ số nguyên thỏa mãn $P(2019).P(2020) = 2021$.

Chứng minh rằng đa thức $P(x) - 2022$ không có nghiệm nguyên.

Câu 2 (6,5 điểm).

a) Giải phương trình $x^2 - 5x + 2 = 2\sqrt{x-1} - \sqrt[3]{x+3}$.

b) Giải hệ phương trình $\begin{cases} y^2 - y(x^2 - x - 1) = x^2 - x \\ y(x^2+1) - x^3 + x^2 = 2. \end{cases}$

Câu 3 (1,5 điểm). Cho ba số thực không âm a, b, c thỏa mãn $ab + bc + ca = 1$. Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức $P = \dfrac{a^2 + b^2 + c^2 + 3}{a + b + c - abc}$.

Câu 4 (6,0 điểm). Cho tam giác nhọn ABC có D, E, F lần lượt là chân các đường cao kẻ từ ba đỉnh A, B, C của tam giác. Gọi H là trực tâm tam giác ABC và K là trung điểm của HC.

a) Chứng minh rằng 4 điểm E, K, D, F cùng thuộc một đường tròn.

b) Đường thẳng đi qua K song song với BC cắt DF tại M. Trên tia DE lấy điểm P sao cho $\widehat{MAP} = \widehat{BAC}$. Chứng minh rằng $\dfrac{S_{AMF}}{S_{AMP}} = \dfrac{MF}{MP}$ *(Trong đó S_{AMF}, S_{AMP} lần lượt là diện tích các tam giác AMF và AMP).*

Câu 5 (3,0 điểm).

a) Cho hình thoi ABCD có $AB = a$. Gọi R_1, R_2 lần lượt là bán kính đường tròn ngoại tiếp của các tam giác ABC và ABD. Chứng minh rằng $R_1 + R_2 \geq a\sqrt{2}$.

b) Cho đa giác đều có 2021 đỉnh, sao cho mỗi đỉnh của đa giác đó chỉ được tô bằng một trong hai màu xanh hoặc đỏ. Chứng minh rằng tồn tại 3 đỉnh của đa giác đã cho là các đỉnh của một tam giác cân mà các đỉnh đó được tô cùng một màu.

……………**Hết**……………

Họ và tên thí sinh…………………………………… *Số báo danh*………………

Câu 1.

a) Tìm tất cả các giá trị nguyên của a để $A = a^2 + 4a + 2021$ là một số chính phương.

b) Cho đa thức $P(x)$ với các hệ số nguyên thỏa mãn $P(2019).P(2020) = 2021$. Chứng minh rằng đa thức $P(x) - 2022$ không có nghiệm nguyên.

Lời giải.

a) Vì A là một số chính phương nên đặt $A = a^2 + 4a + 2021 = x^2$ $(x \in \mathbb{Z})$. Lúc này ta được

$$x^2 - (a+2)^2 = 2017 \Leftrightarrow (x - a - 2)(x + a + 2) = 2017$$

Vì 2017 là số nguyên tố nên các ước của 2017 sẽ là $\pm 1, \pm 2017$ nên sẽ chỉ xảy ra các trường hợp sau

$$\left[\begin{array}{l} \begin{cases} x - a - 2 = 1 \\ x + a + 2 = 2017 \end{cases} \\ \begin{cases} x - a - 2 = 2017 \\ x + a + 2 = 1 \end{cases} \\ \begin{cases} x - a - 2 = -1 \\ x + a + 2 = -2017 \end{cases} \\ \begin{cases} x - a - 2 = -2017 \\ x + a + 2 = -1 \end{cases} \end{array}\right.$$

Giải các hệ trên ta thu được các giá trị a thỏa mãn là $a = 1006$, $a = -1005$.

b) Giả sử đa thức $P(x) - 2022$ có nghiệm nguyên a. Thế thì

$$P(x) = (x - a) \cdot g(x) + 2022$$

trong đó $g(x)$ là đa thức có các hệ số nguyên. Suy ra $P(2019) = (2019 - a) \cdot g(2019) + 2022$

$$P(2020) = (2020 - a) \cdot g(2020) + 2022$$

trong đó $g(2019), g(2020)$ là các số nguyên. Do đó

$$P(2019) \cdot P(2020) = (2019 - a)(2020 - a)g(2019) \cdot g(2020) + 2022.(P(2020) + P(2019) - 4044) + 2022^2$$

Ta suy ra

$$2021 = (2019 - a)(2020 - a)g(2019) \cdot g(2020) + 2022.(P(2020) + P(2019) - 4044) + 2022^2$$

Không xảy ra đẳng thức trên vì vế trái là số lẻ, còn vế phải là số chẵn do có tích của hai số nguyên liên tiếp $2019 - a$ và $2020 - a$.

Bài toán được giải quyết. ■

Tương tự ta chứng minh được tứ giác $AEFO$ nội tiếp suy ra $BE.AB = BO.BF$, như vậy

$$\frac{1}{AG^2}+\frac{1}{BF^2}=\frac{BO^2}{BE^2.BA^2}+\frac{AO^2}{AE^2.AB^2}=\frac{1}{a^2}\left(\frac{BO^2}{BE^2}+\frac{AO^2}{AE^2}\right)=\frac{1}{a^2}.\frac{BO^2+AO^2}{\frac{1}{4}AB^2}=\frac{4}{a^2}$$

Áp dụng bất đẳng thức $Cauchy-Schwarz$ ta được

$$\frac{4}{a^2}=\frac{1}{R_1^2}+\frac{1}{R_2^2}\geqslant\frac{1}{2}\left(\frac{1}{R_1}+\frac{1}{R_1}\right)^2\geqslant\frac{8}{(R_1+R_2)^2}$$

Nên $R_1+R_2\geqslant a\sqrt{2}$. Vậy bất đẳng thức được chứng minh.

Cách 2. Đặt $AC=b, BD=c, \Rightarrow S_{ABC}=S_{ABD}=\frac{bc}{4}$ và $a^2=\frac{b^2}{4}+\frac{c^2}{4}\geqslant\frac{bc}{2}$.

Ta có $R_1=\frac{a\cdot a\cdot b}{4\cdot S_{ABC}}=\frac{a^2}{c}, R_2=\frac{a^2}{b}$, như vậy cần chứng minh rằng

$$\frac{a^2}{c}+\frac{a^2}{b}\geqslant a\sqrt{2}\Leftrightarrow\frac{a}{b}+\frac{a}{c}\geqslant\sqrt{2}$$

Áp dụng bất đẳng thức $AM-GM$ ta được

$$\frac{a}{b}+\frac{a}{c}\geqslant 2\sqrt{\frac{a^2}{bc}}\geqslant 2\sqrt{\frac{\frac{bc}{2}}{bc}}=\sqrt{2}$$

Hoàn tất chứng minh.

b) Vì đa giác có 2021 đỉnh mà tô bởi 2 màu suy ra $\exists$ 2 đỉnh kề nhau cùng màu. Giả sử 2 đỉnh đó là A, B. Do đa giác có lẻ đỉnh nên $\exists$ điểm C thuộc trung trực AB. Không mất tính tổng quát, giả sử A, B được tô màu xanh.

- Nếu C màu xanh $\Rightarrow \triangle ABC$ thỏa mãn đề bài.
- Nếu C màu đỏ. Gọi E, F là hai đỉnh kề với $A, B (E\neq B, F\neq A)$.
- Nếu E, F đỏ $\Rightarrow \triangle CEF$ thỏa mãn đề bài.
- Nếu 1 trong 2 đỉnh E, F màu xanh thì $\triangle ABE$ hoặc $\triangle BFA$ thỏa mãn đề bài.

Bài toán được giải quyết. ■

$$\Leftrightarrow y^2+y-2=0$$
$$\Leftrightarrow \left[\begin{aligned} &y=1\\ &y=-2\end{aligned}\right.$$

Đến đây ta có thể đưa ra kết luận của bài toán.

Như vậy bài toán được giải quyết. ■

Câu 3. Cho ba số thực không âm a,b,c thỏa mãn $ab+bc+ac=1$.
Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức $P=\dfrac{a^2+b^2+c^2+3}{a+b+c-abc}$.

Lời giải.

Cách 1. Ta có

$$\begin{aligned} a^2+b^2+c^2+3&=a^2+b^2+c^2+3(ab+bc+ac)\\ &=(a+b)(b+c)+(b+c)(a+c)+(a+b)(a+c)\\ a+b+c-abc&=(ab+bc+ac)(a+b+c)-abc\\ &=(a+b)(b+c)(a+c)\end{aligned}$$

Như vậy biểu thức ban đầu được biến đổi thành

$$P=\frac{a^2+b^2+c^2+3}{a+b+c-abc}=\frac{1}{a+b}+\frac{1}{b+c}+\frac{1}{a+c}$$

Không mất tính tổng quát giả sử $c=\max(a,b,c)$ nên

$$(a+b)^2\leqslant 2c(a+b)\leqslant 2(ab+bc+ac)=2\Rightarrow a+b<2$$

Ta có.

$$1=ab+bc+ac\Rightarrow a^2+1=a^2+ab+bc+ac=(a+b)(a+c)\Leftrightarrow \frac{1}{a+c}=\frac{a+b}{a^2+1}$$

$$\frac{1}{a+c}=\frac{a+b}{a^2+1}=a+b-\frac{a^2(a+b)}{a^2+1}\geqslant a+b-\frac{a(a+b)}{2}$$

Tương tự ta cũng có $\dfrac{1}{b+c}\geqslant a+b-\dfrac{b(a+b)}{2}$ nên

$$P\geqslant \frac{1}{a+b}+\frac{(a+b)(4-a-b)}{2}$$

Đặt $a+b=x$ $(x<2)$ thì ta sẽ chứng minh $\dfrac{1}{x}+\dfrac{x(4-x)}{2}\geqslant\dfrac{5}{2}\Leftrightarrow(x-1)^2(2-x)\geqslant 0$ (luôn đúng)
Vậy giá trị nhỏ nhất của $P=\dfrac{5}{2}$ khi (a,b,c) là các hoán vị của bộ $(1,1,0)$.

Cách 2. Đặt $a+b+c=p, ab+bc+ac=q, abc=r$. Ta sẽ chứng minh $P\geqslant\dfrac{5}{2}$.

$$P=\frac{a^2+b^2+c^2+3}{a+b+c-abc}=\frac{p^2-2q+3}{p-r}=\frac{p^2+1}{p-r}$$

Nhận xét. Đây là bài toán không mới và không quá khó để đạt điểm tuyệt đối. Ta có bài toán tổng quát cho bài toán trên như sau.
Cho đa thức $P(x)$ với các hệ số nguyên thỏa mãn

$$P(x).P(x+1) = 2k+1$$

Chứng minh rằng đa thức $P(x)$ không có nghiệm nguyên với x, k là các số nguyên.

Câu 2.

a) Giải phương trình $x^2 - 5x + 2 = 2\sqrt{x-1} - \sqrt[3]{x+2}$.

b) Giải hệ phương trình $\begin{cases} y^2 - y\left(x^2 - x - 1\right) = x^2 - x \\ y\left(x^2+1\right) - x^3 + x^2 = 2 \end{cases}$

Lời giải.

a) Điều kiện xác định. $x \geqslant 1$. Phương trình đầu tương đương

$$\begin{aligned}
&x^2 - 5x = 2\sqrt{x-1} - 4 - \sqrt[3]{x+3} + 2\\
&\Leftrightarrow x(x-5) = 2\left(\sqrt{x-1} - 2\right) - \left(\sqrt[3]{x+3} - 2\right)\\
&\Leftrightarrow x(x-5) = 2 \cdot \frac{x-5}{\sqrt{x-1}+2} - \frac{x-5}{\left(\sqrt[3]{x+3}\right)^2 + 2\sqrt[3]{x+3} + 4}\\
&\Leftrightarrow (x-5)\left(x - \frac{2}{\sqrt{x-1}+2} + \frac{1}{\left(\sqrt[3]{x+3}\right)^2 + 2\sqrt[3]{x+3} + 4}\right) = 0
\end{aligned}$$

Từ điều kiện của bài toán ta thấy

$$\sqrt{x-1} + 2 \geqslant 2 \Rightarrow \frac{2}{\sqrt{x-1}+2} \leqslant 1 \leqslant x \Rightarrow x - \frac{2}{\sqrt{x-1}+2} > 0.$$

Mặt khác ta cũng có

$$\left(\sqrt[3]{x+3}\right)^2 + 2\sqrt[3]{x+3} + 4 > 0.$$

Như vậy phương trình có nghiệm duy nhất $x = 5$.

b) Phương trình (1) của hệ tương đương

$$\begin{aligned}
y^2 - x^2y + xy + y = x^2 - x &\Leftrightarrow \left(y^2 + y\right) - \left(x^2y - x^2\right) + (xy + x) = 0\\
&\Leftrightarrow (y+1)\left(y - x^2 + x\right) = 0\\
&\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} y + 1 = 0 \\ x^2 - x = y \end{array}\right.
\end{aligned}$$

- Nếu $y = -1$, thế vào phương trình (2) ta được $x^3 + 3 = 0 \Leftrightarrow x = -\sqrt[3]{3}$.
- Nếu $y = x^2 - x \Leftrightarrow y + x = x^2$, thế vào phương trình (2) ta được

$$x^2(y-x) + y + x^2 - 2 = 0 \Leftrightarrow (y-x)(y+x) + y + x^2 - 2 = 0$$

Nếu $p \geqslant 2$ do $r \geqslant 0$ nên $P - \dfrac{5}{2} \geqslant \dfrac{p^2+1}{p} - \dfrac{5}{2} = \dfrac{(2p-1)(p-2)}{2p} \geqslant 0$.

Nếu $p < 2$ sử dụng bất đẳng thức Schur, $r \geqslant \dfrac{4q-p^2}{9} = \dfrac{1}{9}p(2-p)(p+2)$ nên

$$P - \frac{5}{2} \geqslant \frac{(2-p)(5p^2-8p+9)}{2p(p^2+5)} = \frac{(2-p)\left(5\left(p-\frac{4}{5}\right)^2 + \frac{29}{5}\right)}{2p(p^2+5)} > 0$$

Do đó bất đẳng thức trên đúng với mọi trường hợp.

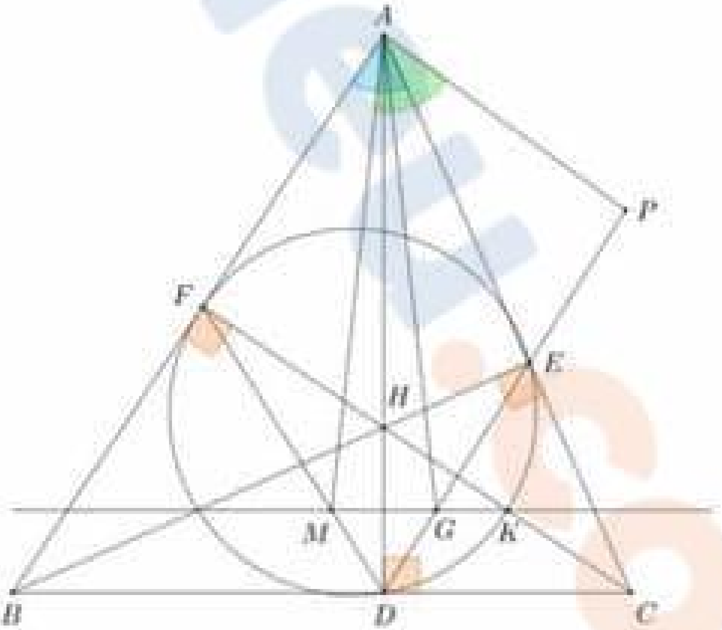
Vậy giá trị nhỏ nhất của $P = \dfrac{5}{2}$ khi (a,b,c) là các hoán vị của bộ $(1,1,0)$. ■

Câu 4. Cho tam giác nhọn ABC có D, E, F lần lượt là chân các đường cao kẻ từ ba đỉnh A, B, C của tam giác. Gọi H là trực tâm tam giác ABC và K là trung điểm của HC.

a) Chứng minh rằng 4 điểm E, K, D, F cùng thuộc một đường tròn.

b) Đường thẳng đi qua K song song với BC cắt DF tại M. Trên tia DE lấy điểm P sao cho $\widehat{MAP} = \widehat{BAC}$. Chứng minh rằng $\dfrac{S_{AMF}}{S_{AMP}} = \dfrac{MF}{MP}$ (trong đó S_{AMF}, S_{AMP} lần lượt là diện tích các tam giác MF và AMP).

✍ **Lời giải.**



a) Ta có $\widehat{EDF} = \widehat{EDH} + \widehat{FDH} = 2\widehat{ECK} = \widehat{EKH} \Rightarrow E, K, D, F$ đồng viên.

b) Ta đi chứng minh $\widehat{FMA} = \widehat{AMP}$. Gọi G là giao điểm của KM và DE.
Ta có $\widehat{EDH} = \widehat{ECK} = \widehat{MDH} \Rightarrow G, M$ đối xứng với nhau qua $AH \Rightarrow \widehat{FMA} = \widehat{AGP}$.
Bây giờ ta chứng minh $\widehat{AMP} = \widehat{AGP}$, tức chứng minh tứ giác $AMGP$ nội tiếp.
Thật vậy, ta có $\widehat{PGK} = \widehat{PDC} = \widehat{BAC} = \widehat{MAP}$, từ đây suy ra $\widehat{FMA} = \widehat{AMP}$.
Từ A kẻ AX, AY vuông góc với MF, MP tại X, Y thì $AX = AY$. Ta có

$$\frac{S_{FMA}}{S_{PMA}} = \frac{AX \cdot MF}{AY \cdot MP} = \frac{MF}{MP}$$

Như vậy ta có điều phải chứng minh.

Bài toán được giải quyết. ■

Nhận xét.

✔ Đường tròn đi qua bốn điểm E, K, D, F ở câu a) chính là đường tròn Euler của tam giác ABC. Đường tròn Euler chính là ảnh của đường tròn ngoại tiếp tam giác ABC qua phép vị tự tâm H tỉ số $\frac{1}{2}$. Sau đây là một số bài toán về đường tròn Euler

Câu 1. Cho tứ giác $ABCD$. Chứng minh rằng đường tròn Euler của các tam giác ABC, BCD, CDA, DAB có một điểm chung. Điểm đồng quy này được gọi là điểm Poncelet.

Câu 2. Cho tam giác ABC, AD, BE, CF là các đường cao. Chứng minh đường thẳng Euler của ba tam giác AEF, BFD, CDE đồng quy tại một điểm nằm trên đường tròn Euler của tam giác ABC.

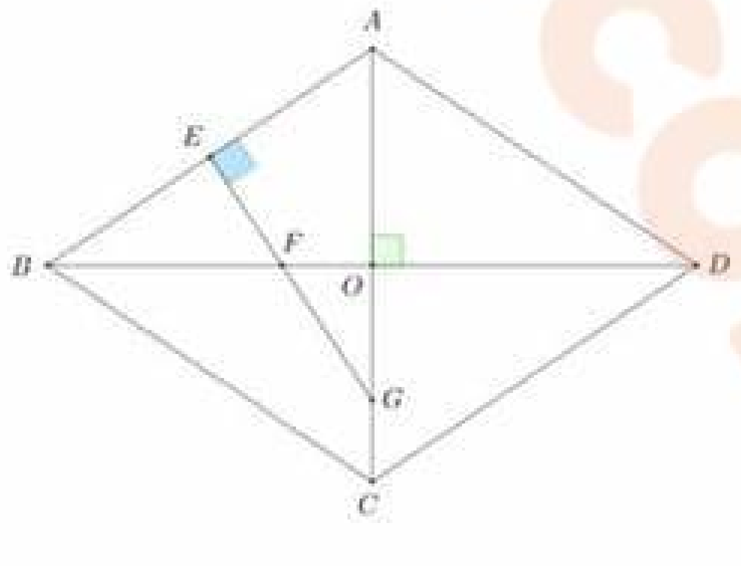
✔ Tổng quát hóa, ở câu b), nếu xét K là điểm bất kỳ nằm trên đoạn thẳng HC (khác H, C) thì ta vẫn có MA là phân giác góc FME.

Câu 5.

a) Cho hình thoi $ABCD$ có $AB = a$. Gọi R_1, R_2 lần lượt là bán kính đường tròn ngoại tiếp ABC và ABD. Chứng minh rằng $R_1 + R_2 \geqslant a\sqrt{2}$.

b) Cho đa giác đều có 2021 đỉnh, sao cho mỗi đỉnh của đa giác đó chỉ được tô bằng một trong hai màu xanh hoặc đỏ. Chứng minh rằng tồn tại 3 đỉnh của đa giác đã cho là các đỉnh của một tam giác cân mà các đỉnh đó được tô cùng một màu.

Lời giải.



a) **Cách 1.** Vẽ trung trực AB cắt AB tại E, BO tại F, AC tại G khi đó F là tâm (ABC), G là tâm (ABD). Vì $\widehat{BEG} = \widehat{BOG} = 90^\circ$ nên tứ giác $BEOG$ nội tiếp suy ra $AE.AB = AO.AG$.