

Hướng dẫn chấm

Môn thi: Toán
Ngày ... tháng 3 năm 2021

(Hướng dẫn chấm có 04 trang, gồm 05 câu)

Câu	Nội dung	Điểm
1 (4,0đ)	1. * ĐKXĐ: $x \neq 0, x \neq 1$.	2,5đ
	Ta có: $P = \frac{x^2 + x}{x^2 - 2x + 1} : \left(\frac{x+1}{x} + \frac{1}{x-1} + \frac{2-x^2}{x^2-x} \right)$	0,25
	$= \frac{x(x+1)}{(x-1)^2} : \frac{(x+1)(x-1) + x + 2 - x^2}{x(x-1)}$	0,5
	$= \frac{x(x+1)}{(x-1)^2} : \frac{x^2 - 1 + x + 2 - x^2}{x(x-1)}$	0,5
	$= \frac{x(x+1)}{(x-1)^2} : \frac{x(x-1)}{x+1} = \frac{x^2}{x-1}$	0,25
	* Vậy với $x \neq 0, x \neq 1$ ta có $P = \frac{x^2}{x-1}$.	0,25
	+ Với $x \neq 0, x \neq 1$, ta có:	0,5
	$P = \frac{x^2}{x-1} = x + 1 + \frac{1}{x-1} = x - 1 + \frac{1}{x-1} + 2.$	0,25
	Vi $x > 1 \Rightarrow x - 1 > 0 \Rightarrow x - 1 + \frac{1}{x-1} \geq 2.$	0,25
	Dấu "=" xảy ra khi $x - 1 = \frac{1}{x-1} \Rightarrow (x-1)^2 = 1 \Rightarrow x = 2.$	0,25
Khi đó: $P = x - 1 + \frac{1}{x-1} + 2 \geq 2 + 2 = 4.$	0,25	
* Vậy GTNN của P là 4, đạt được khi $x = 4.$	0,25	
2.	1,5đ	
Ta có: $4a^2 + b^2 = 5ab$	0,5	
$\Leftrightarrow (a-b)(4a-b) = 0$	0,5	
$\Leftrightarrow \begin{cases} a-b=0 \\ 4a-b=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a=b \\ 4a=b \end{cases}$	0,5	
Do $2a > b > 0$ nên $4a = b$ loại.	0,5	
Với $a = b \Rightarrow C = \frac{ab}{4a^2 - b^2} = \frac{a^2}{4a^2 - a^2} = \frac{1}{3}.$	0,5	
* Vậy $C = \frac{1}{3}.$	0,5	
1.	2đ	
+ Điều kiện xác định: $x \neq 0.$	0,25	
+ Ta có: $x + \frac{1}{x} = x^2 + \frac{1}{x^2} \Leftrightarrow x + \frac{1}{x} = x^2 + 2x \cdot \frac{1}{x} + \frac{1}{x^2} - 2$	0,25	

Môn: Toán

Thời gian: 150 phút (không kể thời gian giao đề)

Ngày 09 tháng 3 năm 2021

(Để có 01 trang, gồm 05 câu)

Số báo danh

Câu 1: (4,0 điểm)

1. Cho biểu thức: $P = \frac{x^2 + x}{x^2 - 2x + 1} : \left(\frac{x+1}{x} + \frac{1}{x-1} + \frac{2-x^2}{x^2-x} \right)$. Rút gọn biểu thức P và

tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức P khi $x > 1$.

2. Biết $4a^2 + b^2 = 5ab$ với $2a > b > 0$. Tính giá trị biểu thức: $C = \frac{ab}{4a^2 - b^2}$.

Câu 2: (4,0 điểm)

1. Giải phương trình: $x + \frac{1}{x} = x^2 + \frac{1}{x^2}$.

2. Tìm các cặp số $(x; y; z)$ thỏa mãn: $\frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{1}{z} = 2$ và $\frac{2}{xy} - \frac{1}{z^2} = 4$.

Câu 3: (4,0 điểm)

1. Tìm các số nguyên $x; y$ thỏa mãn: $x^2 + y^2 + 5x^2y^2 + 60 = 37xy$.

2. Cho a, b, c là các số hữu tỉ dương sao cho $\frac{a}{2} + \frac{b^2}{4} + \frac{c^2}{4}, \frac{b}{2} + \frac{c^2}{4} + \frac{a^2}{4}, \frac{c}{2} + \frac{a^2}{4} + \frac{b^2}{4}$

là các số nguyên. Khi đó chứng minh rằng a, b, c là các số nguyên dương.

Câu 4: (6,0 điểm)

Qua một điểm M tùy ý đã cho trên đáy lớn AB của hình thang $ABCD$ ta kẻ các đường thẳng song song với hai đường chéo AC và BD . Các đường thẳng song song này cắt các cạnh BC và AD lần lượt tại E và F . Đoạn EF cắt AC và BD tại I và J tương ứng.

1. Gọi O là giao điểm của AC và BD . Chứng minh $\frac{FI}{IE} = \frac{OD}{OB}$.

2. Gọi N, P lần lượt là trung điểm của AC và BD . Đường thẳng qua N vuông góc với AD cắt đường thẳng qua P vuông góc với BC tại Q .

a. Chứng minh rằng NP song song với AB .

b. Chứng minh tam giác QAB là tam giác cân.

Câu 5: (2,0 điểm)

Chứng minh rằng nếu $a, b, c \geq 0$ và $abc = 1$ thì:

$$\frac{1}{2+a} + \frac{1}{2+b} + \frac{1}{2+c} \leq 1.$$

----- Hết -----

Thí sinh không sử dụng tài liệu. Giám thị không giải thích gì thêm.

	$\Leftrightarrow \left(x + \frac{1}{x}\right)^2 - \left(x + \frac{1}{x}\right) - 2 = 0$ $\Leftrightarrow \left(x + \frac{1}{x} + 1\right)\left(x + \frac{1}{x} - 2\right) = 0$ $\Rightarrow \begin{cases} x + \frac{1}{x} = -1 \\ x + \frac{1}{x} = 2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x^2 + x + 1 = 0 \\ x^2 - 2x + 1 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} (2x+1)^2 + 3 = 0 \\ (x-1)^2 = 0 \end{cases}$ $\Rightarrow x = 1 \text{ (tm).}$	0,75 0,5 0,5
	* Vậy phương trình có nghiệm duy nhất $x=1$.	0,25
	2.	2đ
	+ Điều kiện: $x; y; z \neq 0$.	0,25
	+ Ta có: $\frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{1}{z} = 2 \Rightarrow \left(\frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{1}{z}\right)^2 = 4$	
	$\Leftrightarrow \frac{1}{x^2} + \frac{1}{y^2} + \frac{1}{z^2} + \frac{2}{xy} + \frac{2}{yz} + \frac{2}{zx} = 4 = \frac{2}{xy} + \frac{1}{z^2}$	
	$\Leftrightarrow \left(\frac{1}{x^2} + \frac{2}{zx} + \frac{1}{z^2}\right) + \left(\frac{1}{y^2} + \frac{2}{yz} + \frac{1}{z^2}\right) = 0$	
	$\Leftrightarrow \left(\frac{1}{x} + \frac{1}{z}\right)^2 + \left(\frac{1}{y} + \frac{1}{z}\right)^2 = 0$	0,75
	$\Rightarrow \begin{cases} \frac{1}{x} + \frac{1}{z} = 0 \\ \frac{1}{y} + \frac{1}{z} = 0 \end{cases} \Rightarrow x = y = -z.$	0,5
	$\Rightarrow \frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{1}{z} = 2 \Leftrightarrow \frac{1}{x} + \frac{1}{x} + \frac{1}{-x} = 2 \Rightarrow x = \frac{1}{2}.$	
	$\Rightarrow x = y = \frac{1}{2}; z = -\frac{1}{2}.$	0,25
	* Vậy $(x; y; z) = \left(\frac{1}{2}; \frac{1}{2}; -\frac{1}{2}\right)$.	0,25
	1.	2đ
	1. Ta có: $x^2 + y^2 + 5x^2y^2 + 60 = 37xy$.	0,75
	$\Leftrightarrow x^2 + y^2 - 2xy = 35xy - 5x^2y^2 - 60$	
	$\Leftrightarrow (x-y)^2 = 5(3-xy)(xy-4) \quad (1)$	0,5
	+ Vì $(x-y)^2 \geq 0$ nên $5(3-xy)(xy-4) \geq 0 \Leftrightarrow 3 \leq xy \leq 4 \Leftrightarrow xy \in \{3; 4\}$	
3 (4,0đ)	+ Đẳng thức (1) xảy ra $\Leftrightarrow \begin{cases} xy = 4 \\ x, y \in \mathbb{Z} \\ x = y \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 2 \\ y = 2 \\ x = -2 \\ y = -2 \end{cases}$	0,5
	* Vậy $(x, y) \in \{(2; 2); (-2; -2)\}$.	0,25
	2.	2đ

Đặt $a = \frac{x}{m}; b = \frac{y}{m}; c = \frac{z}{m}$ trong đó $x, y, z, m \in \mathbb{N}$ và $(x, y, z, m) = 1$.

Khi đó: $\frac{a}{2} + \frac{b^2}{4} + \frac{c^2}{4} = \frac{x}{2m} + \frac{y^2}{4m^2} + \frac{z^2}{4m^2} = \frac{2mx + y^2 + z^2}{4m^2}$ là số nguyên, suy ra $2x + y^2 + z^2 : 4m^2$

Tương tự $2my + z^2 + x^2 : 4m^2; 2mz + x^2 + y^2 : 4m^2$

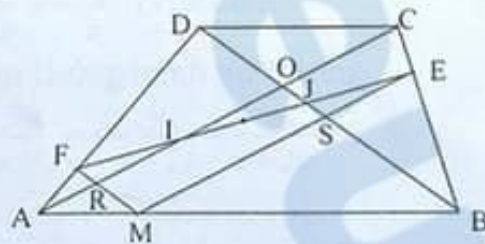
Từ đó rút ra:
$$\begin{cases} x^2 + y^2 : 2m \\ y^2 + z^2 : 2m \\ z^2 + x^2 : 2m \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 2x^2 : 2m \\ 2y^2 : 2m \\ 2z^2 : 2m \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x^2 : m \\ y^2 : m \\ z^2 : m \end{cases} \quad (1)$$

Nếu m có ước nguyên tố p suy ra $\begin{cases} x^2 : p \\ y^2 : p \\ z^2 : p \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x : p \\ y : p \\ z : p \end{cases}$ kết hợp với $(x, y, z, m) = 1$

suy ra $m=1$

Kết luận a, b, c là các số nguyên dương.

1)



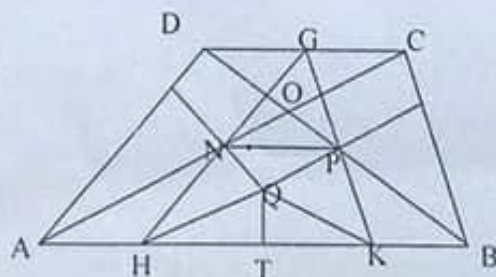
Gọi R là giao điểm của AC và MF , S là giao điểm của BD và ME .

ΔMFE có $RI // ME \Rightarrow \frac{FI}{IE} = \frac{FR}{RM} \quad (1)$

ΔAOD có $RF // OD \Rightarrow \frac{FR}{OD} = \frac{AR}{AO}$; ΔABO có $RM // OB \Rightarrow \frac{RM}{OB} = \frac{AR}{AO}$.

$\Rightarrow \frac{FR}{OD} = \frac{RM}{OB} \Rightarrow \frac{FR}{OD} = \frac{RM}{OB} \quad (2)$

+ Từ (1) và (2) $\Rightarrow \frac{FI}{IE} = \frac{OD}{OB} \quad (3)$



2,5

	<p>2. a) Gọi G là trung điểm CD, GN và GP cắt AB tại H và K. Ta chứng minh được $\Delta NGC = \Delta NHA(g - c - g) \Rightarrow NG = NH$ Tương tự: $PG = PK$ Từ đó: NP là đường trung bình của tam giác GHK. Suy ra NP song song với AB</p>	2,5
	<p>c) Ta có: $\Delta NGC = \Delta NHA \Rightarrow GC = AH = DG$ Suy ra $AHGD$ là hình bình hành $\Rightarrow QN \perp GH$ Khi đó QN là trung trực của GH. Tương tự QP là trung trực của GK. Kẻ $\Rightarrow QT \perp HK$ thì QT cũng là trung trực của HK $\Rightarrow HT \perp TK$ Mà $AH=DG=GC=BK$ nên suy ra $AT=BT$. Vậy QT cũng là trung trực của AB nên $QA=QB$. Kết luận: Tam giác QAB cân tại Q.</p>	1
5 (2,0đ)	<p>+ Ta có:</p> $\frac{1}{2+a} + \frac{1}{2+b} + \frac{1}{2+c} \leq 1 \Leftrightarrow \frac{2}{2+a} + \frac{2}{2+b} + \frac{2}{2+c} \leq 2$ $\Leftrightarrow 1 - \frac{2}{2+a} + 1 - \frac{2}{2+b} + 1 - \frac{2}{2+c} \geq 3 - 2 = 1$ $\Leftrightarrow \frac{a}{2+a} + \frac{b}{2+b} + \frac{c}{2+c} \geq 1 \quad (1)$ <p>+ Đặt $a = \frac{x}{y}; b = \frac{y}{z}; c = \frac{z}{x} \quad (x; y; z \in R)$.</p> <p>+ Ta có BĐT cần chứng minh trở thành:</p> $\frac{x}{x+2y} + \frac{y}{y+2z} + \frac{z}{z+2x} \geq 1.$ <p>+ Ta có:</p> $VT = \frac{x}{x+2y} + \frac{y}{y+2z} + \frac{z}{z+2x} = \frac{x^2}{x^2+2xy} + \frac{y^2}{y^2+2yz} + \frac{z^2}{z^2+2zx}$ $\geq \frac{(x+y+z)^2}{x^2+y^2+z^2+2xy+2yz+2zx} = \frac{(x+y+z)^2}{(x+y+z)^2} = 1.$ <p>+ Dấu "=" xảy ra khi $x=y=z$ hay $a=b=c=1$. (đpcm)</p>	0,5 0,5 0,75 0,25

Chú ý:

1. Thí sinh có thể làm bài bằng cách khác, nếu đúng vẫn được điểm tối đa.
2. Nếu thí sinh chứng minh bài hình mà không vẽ hình thì không chấm điểm bài hình.