SỞ GIÁO DỤC VÀ ĐÀO TẠO
**BÌNH ĐỊNH**

*Đề chính thức*

**ĐỀ THI HỌC SINH GIỎI CẤP TỈNH LỚP 9**
Năm học: **2020 – 2021**
Môn: **TOÁN** – Ngày thi: **18/03/2021**
*Thời gian làm bài: **150 phút** (không kể thời gian phát đề)*

-------------------- oOo --------------------

**Bài 1.** (*5.0 điểm*)

**1.** Giải phương trình: $\sqrt{x-\sqrt{x^2-1}}+\sqrt{x+\sqrt{x^2-1}}=2$.

**2.** Cho các số thực $a$, $b$, $c$ thỏa mãn $\frac{2b-c}{a}\geq 4$.

Chứng minh rằng phương trình: $ax^2+bx+c=0$ luôn có nghiệm.

**Bài 2.** (*6.0 điểm*)

**1.** Tìm nghiệm nguyên của phương trình: $\left(x^2+y\right)\left(x+y^2\right)=\left(x-y\right)^3$.

**2.** Cho $69$ số nguyên dương phân biệt không vượt quá $100$. Chứng minh rằng có thể chọn ra từ $69$ số đó $4$ số sao cho trong chúng có $1$ số bằng tổng của $3$ số còn lại.

**Bài 3.** (*4.0 điểm*)

Cho nửa đường tròn tâm $O$ đường kính $AB$, trên nửa đường tròn $(O)$ lấy điểm $C$ sao cho cung $BC$ nhỏ hơn cung $AC$, qua $C$ dựng tiếp tuyến với đường tròn $(O)$ cắt $AB$ tại $D$. Kẻ $CH$ vuông góc với $AB$ $(H\in AB)$, kẻ $BK$ vuông góc với $CD$ $(K\in CD)$; $CH$ cắt $BK$ tại $E$.

a) Chứng minh $BK+BD<EC$.

b) Chứng minh $BH.AD=AH.BD$.

**Bài 4.** (*3.0 điểm*)

Cho tam giác $ABC$ vuông cân tại $A$ và $M$ là điểm di động trên $BC$ ($M$ khác $B$, $C$). Hình chiếu của $M$ lên $AB$, $AC$ lần lượt là $H$ và $K$. Gọi $I$ là giao điểm của $BK$ và $CH$. Chứng minh rằng đường thẳng $IM$ luôn đi qua một điểm cố định.

**Bài 5.** (*2.0 điểm*)

Tìm tất cả các giá trị của $x$ để:

$$\sqrt[4]{(x-2)(4-x)}+\sqrt[4]{x-2}+\sqrt[4]{4-x}+6x\sqrt{3x}-x^3\leq 30.$$

---------- ∞ **HẾT** ∞ ----------

# ĐÁP ÁN THAM KHẢO – HSG TOÁN 9 – BÌNH ĐỊNH 2021

**Bài 1.** *(5.0 điểm)*

**1.** Giải phương trình: $\sqrt{x-\sqrt{x^2-1}}+\sqrt{x+\sqrt{x^2-1}}=2$.

**2.** Cho các số thực $a$, $b$, $c$ thỏa mãn $\frac{2b-c}{a}\geq 4$.

Chứng minh rằng phương trình: $ax^2+bx+c=0$ luôn có nghiệm.

**1.** Điều kiện: $\begin{cases} x^2-1\geq 0 \\ x+\sqrt{x^2-1}\geq 0 \\ x-\sqrt{x^2-1}\geq 0 \end{cases}$.

Ta có $x+\sqrt{x^2-1}=0\Leftrightarrow \begin{cases} x\leq 0 \\ x^2=x^2-1 \end{cases}$ vô nghiệm. Do đó có thể biết đổi phương trình như sau:

$$\sqrt{x-\sqrt{x^2-1}}+\sqrt{x+\sqrt{x^2-1}}=2\Leftrightarrow \frac{1}{\sqrt{x+\sqrt{x^2-1}}}+\sqrt{x+\sqrt{x^2-1}}=2\ (*).$$

*Cách 1:* $(*)\Leftrightarrow \left(\sqrt{x+\sqrt{x^2-1}}\right)^2-2\sqrt{x+\sqrt{x^2-1}}+1=0\Leftrightarrow \left(\sqrt{x+\sqrt{x^2-1}}-1\right)^2=0$

$$\Leftrightarrow \sqrt{x+\sqrt{x^2-1}}-1=0\Leftrightarrow x+\sqrt{x^2-1}=1\Leftrightarrow \begin{cases} x\leq 1 \\ x^2-1=x^2-2x+1 \end{cases}\Leftrightarrow x=1 \text{ (thỏa ĐK)}.$$

➢ Vậy nghiệm của phương trình là $x=1$.

*Cách 2:* Áp dụng bất đẳng thức Côsi, ta có: $\text{VT}_{(*)}\geq 2=\text{VP}_{(*)}$.

Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi:

$$\frac{1}{\sqrt{x+\sqrt{x^2-1}}}=\sqrt{x+\sqrt{x^2-1}}\Leftrightarrow x+\sqrt{x^2-1}=1\Leftrightarrow \begin{cases} x\leq 1 \\ x^2-1=x^2-2x+1 \end{cases}\Leftrightarrow x=1 \text{ (thỏa ĐK)}.$$

➢ Vậy nghiệm của phương trình là $x=1$.

**2.** Ta có $\Delta=b^2-4ac\geq b^2-\frac{2b-c}{a}.ac=b^2-2bc+c^2=(b-c)^2\geq 0$ với mọi $b$, $c$.

➢ Vậy phương trình đã cho luôn có nghiệm.

**Bài 2.** *(6.0 điểm)*

**1.** Tìm nghiệm nguyên của phương trình: $(x^2+y)(x+y^2)=(x-y)^3$.

**2.** Cho $69$ số nguyên dương phân biệt không vượt quá $100$. Chứng minh rằng có thể chọn ra từ $69$ số đó $4$ số sao cho trong chúng có $1$ số bằng tổng của $3$ số còn lại.

**1.** Ta có: $(x^2+y)(x+y^2)=(x-y)^3\Leftrightarrow 3x^2y+x^2y^2+xy-3xy^2+2y^3=0$.

$$\Leftrightarrow y\left[2y^2+(x^2-3x)y+3x^2+x\right]=0\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} y=0 \\ 2y^2+(x^2-3x)y+3x^2+x=0 \end{array}\right..$$

• Với $y=0$, ta được: $x^3=x^3$ luôn đúng với mọi $x\in\mathbb{Z}$.

Do đó trong trường hợp này phương trình có vô số nghiệm nguyên $(x;y)$ là $(k;0)$ với $k\in\mathbb{Z}$.

• Với $2y^2+(x^2-3x)y+3x^2+x=0$, ta có: $\Delta_y=x^4-6x^3+9x^2-24x^2-8x=x(x+1)^2(x-8)$.

*Trường hợp 1:* $x=-1$ khi đó phương trình có nghiệm kép $y=\frac{3x-x^2}{4}=\frac{-4}{4}=-1$.

<u>*Trường hợp 2:*</u> $x \neq -1$. Để phương trình có nghiệm nguyên thì $\Delta$ là số chính phương, suy ra

$x(x-8) = a^2$ với $a \in \mathbb{Z}$

$\Leftrightarrow (x-4+a)(x-4-a) = 16$.

Lập bảng, tìm được $(x;a) = (9;-3)$, $(8;0)$, $(9;3)$, $(-1;3)$, $(0;0)$, $(-1;3)$.

Do đó $x \in \{-1;0;8;9\}$.

- Với $x = 0$ thì $y = 0$.
- Với $x = -1$ thì $y = -1$.
- Với $x = 8$ thì $y = -10$.
- Với $x = 9$ thì $\left[\begin{array}{l} y = -6 \\ y = -21 \end{array}\right.$.

Do đó trong trường hợp này nghiệm của phương trình là:

$$(x;y) = (0;0),\ (-1;-1),\ (8;-10),\ (9;-6),\ (9;-21).$$

➢ Vậy nghiệm nguyên của phương trình là:

$$(x;y) = (x;y) = (-1;-1),\ (8;-10),\ (9;-6),\ (9;-21),\ (k;0) \text{ (với } k \in \mathbb{Z}).$$

**2.** Giả sử bộ $69$ số là: $1 \le a_1 < a_2 < a_3 < ... < a_{69} \le 100$. Suy ra $a_1 \le 32$; $a_3 \ge 3$ và $a_2 \ge 2$.

Khi đó suy ra:

- $4 \le a_1 + a_3 < a_1 + a_4 < ... < a_1 + a_{69} \le 132$ $(1)$; dãy này có $67$ số hạng.
- $1 \le a_3 - a_2 < a_4 - a_2 < ... < a_{69} - a_2 \le 98$ $(2)$; dãy này có $67$ số hạng.

Do đó dãy $(1)$ và dãy $(2)$ có $134$ số hạng nhận các giá trị từ $1$ đến $132$ (có $132$ giá trị).

Theo nguyên tắc Đirichlet suy ra có ít nhất $2$ số hạng bằng giá trị nhau.

Giả sử $a_1 + a_m = a_n - a_2$ (với $3 \le m,\ n \le 69$ và $m,\ n \in \mathbb{N}^*$), suy ra $a_1 + a_2 + a_m = a_n$.

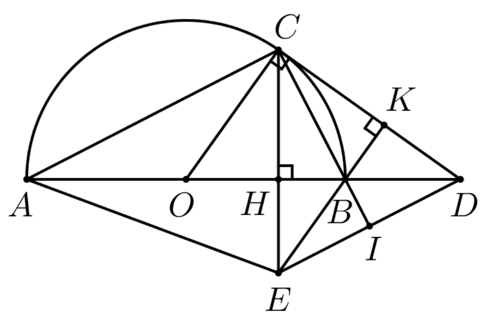
➢ Vậy từ $69$ số nguyên dương phân biệt không vượt quá $100$ luôn chọn được $4$ số sao cho trong chúng có $1$ số bằng tổng của $3$ số còn lại.

**Bài 3.** (*4.0 điểm*)

Cho nửa đường tròn tâm $O$ đường kính $AB$, trên nửa đường tròn $(O)$ lấy điểm $C$ sao cho cung $BC$ nhỏ hơn cung $AC$, qua $C$ dựng tiếp tuyến với đường tròn $(O)$ cắt $AB$ tại $D$. Kẻ $CH$ vuông góc với $AB$ $(H \in AB)$, kẻ $BK$ vuông góc với $CD$ $(K \in CD)$; $CH$ cắt $BK$ tại $E$.

a) Chứng minh $BK + BD < EC$.

b) Chứng minh $BH.AD = AH.BD$.




**a)** • Tam giác $CDE$ có $BH \perp CE$; $EK \perp CD$ nên $B$ là trực tâm của $\Delta CDE$ $\Rightarrow$ $BC \perp ED$ $(1)$.

• Ta có:

$\widehat{HAC} = \widehat{HCB}$ (cùng phụ $\widehat{ABC}$).

$\widehat{HAC} = \widehat{BCD}$ (góc tạo bởi tiếp tuyến và dây cung – góc nội tiếp chắn cùng cung $\overset{\frown}{BC}$).

Do đó: $\widehat{BCD} = \widehat{HCB}$.

Suy ra $BC$ là tia phân giác của $\Delta CDE$ $(2)$.

Từ $(1)$ và $(2)$ suy ra: $\Delta CDE$ cân tại $C$ $\longrightarrow$ $BC$ là đường trung trực của $ED$ $\Rightarrow BE = BD$.

Khi đó: $BK + BD = BK + BE = EK < EC$ (vì $\Delta EKC$ vuông tại $K$).

**b)** Gọi $I$ là giao điểm của $BC$ và $ED$.

• Ta có: $BH.AD = BH.(AB + BD) = BH.AB + BH.BD$.

- $BH.AB = BC^2$ (do $\Delta ABC$ vuông tại $C$ và $CH$ là đường cao).
- $BH.BD = BI.BC$ (do $\Delta BHC \backsim \Delta BID$).

Suy ra: $BH.AD = BH.AB + BH.BD = BC^2 + BI.BC = BC.(BC + CI) = CB.CI \ (3)$.

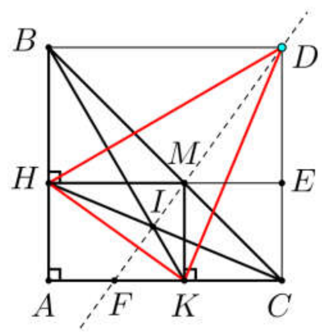
• Ta có: $AH.BD = AC.ID$ (do $\Delta AHC \backsim \Delta BID$) $(4)$.

$AC.ID = CB.CI$ (do $\Delta ABC \backsim \Delta CDI$) $(5)$.

➢ Từ $(3)$, $(4)$ và $(5)$ suy ra: $BH.AD = AH.BD$.

**Bài 4.** (*3.0 điểm*)

Cho tam giác $ABC$ vuông cân tại $A$ và $M$ là điểm di động trên $BC$ ($M$ khác $B$, $C$). Hình chiếu của $M$ lên $AB$, $AC$ lần lượt là $H$ và $K$. Gọi $I$ là giao điểm của $BK$ và $CH$. Chứng minh rằng đường thẳng $IM$ luôn đi qua một điểm cố định.




• Dựng hình vuông $ABCD$. Gọi $E$ là giao điểm của $HM$ và $CD$; $F$ là giao điểm của $DM$ và $AC$.

• Vì $\Delta BHM$ vuông cân tại $H$; $\Delta MKC$ vuông cân tại $K$ và tứ giác $AHMK$ là hình chữ nhật nên:

$$BH = HM = AK \text{ và } CK = MK = AH.$$

Chứng minh được: $\Delta BDH = \Delta ABK$ (c – g – c), suy ra $\widehat{BHD} = \widehat{AKB}$.

Lại có $\widehat{AKB} + \widehat{ABK} = 90^\circ$, nên $\widehat{BHD} + \widehat{ABK} = 90^\circ \longrightarrow BK \perp HD \ (1)$.

• Tương tự, chứng minh được: $CH \perp DK \ (2)$.

Từ $(1)$ và $(2)$ suy ra: $I$ là trực tâm của $\Delta DHK \longrightarrow DI \perp HK \ (*)$.

• Ta có: $ME \mathbin{//} AC$ nên $\widehat{DME} = \widehat{DFC}$ (so le trong) $(3)$.

Vì $AHMK$ là hình chữ nhật, $CEMK$ là hình vuông nên $HA = MK = ME = CK = CE$.

Lại có: $CD = CA$ nên $CA - CK = CD - CE \Leftrightarrow AK = DE$.

Khi đó: $\Delta AHK = \Delta EMD$ (c – g – c) $\longrightarrow \widehat{AHK} = \widehat{DME} \ (4)$.

Từ $(3)$ và $(4)$, suy ra: $\widehat{AHK} = \widehat{DFC}$ mà $\widehat{AHK} + \widehat{AKH} = 90^\circ$ nên $\widehat{DKC} + \widehat{AKH} = 90^\circ$.

Do đó $DM \perp HK \ (**)$.

Từ $(*)$ và $(**)$, suy ra: $D$, $I$, $M$ thẳng hàng; mà $D$ là điểm cố định.

➢ Do đó đường thẳng $IM$ luôn đi qua một điểm cố định.

**Bài 5.** (*2.0 điểm*)

Tìm tất cả các giá trị của $x$ để:

$$\sqrt[4]{(x-2)(4-x)} + \sqrt[4]{x-2} + \sqrt[4]{4-x} + 6x\sqrt{3x} - x^3 \le 30.$$

Điều kiện: $2 \le x \le 4$.

Áp dụng bất đẳng thức Côsi, ta có:

• $\sqrt[4]{(x-2)(4-x)} = \sqrt{\sqrt{x-2}.\sqrt{4-x}} \le \sqrt{\dfrac{x-2+4-x}{2}} = 1$.

• $\sqrt[4]{x-2} \le \dfrac{\sqrt{x-2}+1}{2} \le \dfrac{\dfrac{x-2+1}{2}+1}{2} = \dfrac{x+1}{4}$.

- $\sqrt[4]{4-x} \le \dfrac{\sqrt{4-x}+1}{2} \le \dfrac{\dfrac{4-x+1}{2}+1}{2} = \dfrac{7-x}{4}$.
- $6x\sqrt{3x} = 2.\sqrt{27}.\sqrt{x^3} \le 27 + x^3$ suy ra $6x\sqrt{3x} - x^3 \le 27$.

Cộng vế theo vế ta được:

$$\sqrt[4]{(x-2)(4-x)} + \sqrt[4]{x-2} + \sqrt[4]{4-x} + 6x\sqrt{3x} - x^3 \le 1 + \frac{x+1}{4} + \frac{7-x}{4} + 27 = 30 \quad .$$

Do đó bất phương trình đã cho luôn đúng với $2 \le x \le 4$.

➢ Vậy nghiệm của bất phương trình là: $2 \le x \le 4$.

**---------- ☙ CHÚC CÁC EM HỌC TỐT ❧ ----------**