# BÀI 2: QUY TẮC TÍNH ĐẠO HÀM

**Câu hỏi ứng dụng**

**Câu hỏi 1 trang 157:**

Dùng định nghĩa tính đạo hàm của hàm số y = $x^3$ tại điểm x tùy ý.

Dự đoán đạo hàm của hàm số y = $x^{100}$ tại điểm x.

**Hướng dẫn giải chi tiết:**

- Giả sử Δx là số gia của đối số tại $x_o$ bất kỳ. Ta có:

$$\Delta y = f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)$$
$$= (x_0 + \Delta x)^3 - {x_0}^3 = 3{x_0}^2\Delta x + 3x_0(\Delta x)^2 + (\Delta x)^3$$
$$=> \frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{3{x_0}^2\Delta x + 3x_0(\Delta x)^2 + (\Delta x)^3}{\Delta x} = 3{x_0}^2 + 3x_0\Delta x + (\Delta x)^2$$
$$=> y'(x_0) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} (3{x_0}^2 + 3x_0\Delta x + (\Delta x)^2) = 3{x_0}^2$$

- Dự đoán đạo hàm của y = $x^{100}$ tại điểm x là $100x^{99}$

**Câu hỏi 2 trang 158:**

Chứng minh khẳng định trong nhận xét trên.

a) Đạo hàm của hàm hằng bằng 0: c’ = 0.

b) Đạo hàm của hàm số y = x bằng 1: x’ = 1.

**Hướng dẫn giải chi tiết:**

a) Hàm hằng ⇒ Δy = 0

$$=> \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = 0$$

b) theo định lí 1

y = x hay y = $x^1$ ⇒ y’= $(x^1)$’= 1. $x^{1-1}$ = 1. $x^o$ = 1.1 =1

**Câu hỏi 3 trang 158:**

Có thể trả lời ngay được không, nếu yêu cầu tính đạo hàm của hàm số f(x) = √x tại x = -3; x = 4?

**Hướng dẫn giải chi tiết:**

x = - 3 < 0 hàm số $y=\sqrt{x}$ không xác định nên f(x) không có đạo hàm tại x = - 3

x = 4, đạo hàm của f(x) là: $y'=\frac{1}{2\sqrt{x}}$

$$\Rightarrow y'(4)=\frac{1}{2\sqrt{4}}=\frac{1}{4}$$

**Câu hỏi 4 trang 159:**

Áp dụng các công thức trong Định lí 3, hãy tính đạo hàm của các hàm số

y = $5x^3$ - $2x^5$;

$$y=-x^3.\sqrt{x}$$

**Hướng dẫn giải chi tiết:**

$$y=-x^3.\sqrt{x}$$

+) Xét y = $5x^3 - 2x^5$

$$y' = (5x^3 - 2x^5)' = (5x^3)' - (2x^5)'$$
$$= 5.(x^3)' - 2.(x^5)' = 5.3x^2 - 2.5x^4 = 15x^2 - 10x^4$$

+) $y = -x^3.\sqrt{x}$

$$y' = (-x^3)'.\sqrt{x} + (-x^3).(\sqrt{x})'$$
$$= -3x^2.\sqrt{x} - x^3.\frac{1}{2\sqrt{x}}$$
$$= -3x^2.\sqrt{x} - \frac{x^2\sqrt{x}}{2} = \frac{-7x^2\sqrt{x}}{2}$$

**Câu hỏi 5 trang 160:**

Hãy chứng minh các công thức trên và lấy ví dụ minh họa.

**Hướng dẫn giải chi tiết:**

- Nếu k là một hằng số thì (ku)’ = ku’

Thật vậy, ta có: (ku)' = k'u + ku' = 0.u + ku' = ku'

Do đạo hàm của hàm hằng bằng 0

$$\left(\frac{1}{v}\right)' = -\frac{v'}{v^2}(v = v(x) \neq 0$$

Thật vậy, ta có:

$$\left(\frac{1}{v}\right)' = \frac{1'v - 1.v'}{v^2} = \frac{0.v - v'}{v^2} = -\frac{v'}{v^2}$$

**Câu hỏi 6 trang 161:**

Hàm số $y = \sqrt{x^2 + x + 1}$ là hàm hợp của hàm số nào ?

**Hướng dẫn giải chi tiết:**

Hàm số $y = \sqrt{x^2 + x + 1}$ là hàm hợp của hàm số $y = \sqrt{u}$ với $u = x^2 + x + 1$

**Bài tập ứng dụng**

**Bài 1 (trang 162 SGK Đại số 11):**

Bằng định nghĩa, tìm đạo hàm của các hàm số sau :

a. $y = 7 + x – x^2$ tại $x_o = 1$

b. $y = x^3 – 2x + 1$ tại $x_o = 2$.

**Hướng dẫn giải chi tiết:**

Cách 1 : Áp dụng công thức

$$y'(x_0) = \lim_{x \to x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}.$$

$$a)\ y'(1) = \lim_{x \to 1} \frac{7 + x - x^2 - 7}{x - 1}$$

$$= \lim_{x \to 1} \frac{x - x^2}{x - 1} = \lim_{x \to 1} \frac{x.(1 - x)}{x - 1}$$

$$= \lim_{x \to 1} (-x) = -1.$$

$$b)\ y'(2) = \lim_{x \to 2} \frac{x^3 - 2x + 1 - 5}{x - 2}$$

$$= \lim_{x \to 2} \frac{x^3 - 2x - 4}{x - 2}$$

$$= \lim_{x \to 2} \frac{(x - 2)(x^2 + 2x + 2)}{x - 2}$$

$$= \lim_{x \to 2} (x^2 + 2x + 2) = 10$$

Cách 2 : Áp dụng công thức

$$y'(x_0) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}{\Delta x}.$$

a) $$y'(1) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{7 + (1 + \Delta x) - (1 + \Delta x)^2 - 7}{\Delta x}$$

$$= \lim_{\Delta x \to 0} \frac{7 + 1 + \Delta x - 1 - 2\Delta x - \Delta^2 x - 7}{\Delta x}$$

$$= \lim_{\Delta x \to 0} \frac{-\Delta x - \Delta^2 x}{\Delta x}$$

$$= \lim_{\Delta x \to 0} (-1 - \Delta x) = -1.$$

b) $$y'(2) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{(2 + \Delta x)^3 - 2(2 + \Delta x) + 1 - 5}{\Delta x}$$

$$= \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta^3 x + 6\Delta^2 x + 10\Delta x}{\Delta x}$$

$$= \lim_{\Delta x \to 0} (\Delta^2 x + 6\Delta x + 10) = 10.$$

**Kiến thức áp dụng**

+ Đạo hàm của hàm số y = f(x) tại x = $x_0$.

$$f'(x_0) = \lim_{x \to x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$$

**Bài 2 (trang 163 SGK Đại số 11):**

Tìm đạo hàm của các hàm số sau :

a) $y = x^5 - 4x^3 + 2x - 3$ ;

b) $y = \frac{1}{4} - \frac{1}{3}x + x^2 - 0,5x^4$ ;

c) $y = \frac{x^4}{2} - \frac{2x^3}{3} + \frac{4x^2}{5} - 1$ ;

d) $y = 3x^5\left(8 - 3x^2\right)$.

**Hướng dẫn giải chi tiết:**

a) $y' = (x^5 - 4x^3 + 2x - 3)'$

$= (x^5)' - (4x^3)' + (2x)' - (3)'$

$= 5x^4 - 4.3x^2 + 2$

$= 5x^4 - 12x^2 + 2.$

b) $y' = \left(\frac{1}{4} - \frac{1}{3}x + x^2 - 0,5x^4\right)'$

$= \left(\frac{1}{4}\right)' - \left(\frac{1}{3}x\right)' + (x^2)' - (0,5x^4)'$

$= 0 - \frac{1}{3} + 2x - 0,5.4x^3$

$= -2x^3 + 2x - \frac{1}{3}$.

c) $y' = \left(\frac{x^4}{2} - \frac{2x^3}{3} + \frac{4x^2}{5} - 1\right)'$

$= \left(\frac{x^4}{2}\right)' - \left(\frac{2x^3}{3}\right)' + \left(\frac{4x^2}{5}\right)' - (1)'$

$= \frac{1}{2}.4x^3 - \frac{2}{3}.3x^2 + \frac{4}{5}.2x - 0$

$= 2x^3 - 2x^2 + \frac{8}{5}x$.

d) Cách 1 : $y = 3x^5(8 - 3x^2)$

$= 3x^5.8 - 3x^5.3x^2 = 24x^5 - 9x^7$

$\Rightarrow y' = (24x^5 - 9x^7)'$

$= (24x^5)' - (9x^7)'$

$= 24.5x^4 - 9.7x^6$

$= 120x^4 - 63x^6$.

Cách 2 : Áp dụng công thức tính đạo hàm của tích :

$\Rightarrow y' = [(3x^5)'].(8 - 3x^2) + 3x^5.[(8 - 3x^2)']$

$= 3.5x^4(8 - 3x^2) + 3x^5.[(8)' - (3x^2)']$

$= 15x^4(8 – 3x^2) + 3x^5.(0 – 3.2x)$

$= 15x^4.8 – 15x^4.3x^2 + 3x^5.(-6x)$

$= 120x^4 – 45x^6 – 18x^6$

$= 120x^4 – 63x^6$.

**Kiến thức áp dụng**

+ $(x_n)’ = n.x_{n – 1}$

+ Với u = u(x) ; v = v(x) là các hàm số có đạo hàm tại x thuộc khoảng xác định ta có :

(u + v)’ = u’ + v’

(u – v)’ = u’ – v’

(k.u)’ = k.u’ (k là hằng số)

(u.v)’ = u’.v + u.v’.

**Bài 3 (trang 163 SGK Đại số 11):**

Tìm đạo hàm của các hàm số sau :

a. $y = (x^7 – 5x^2)^3$ b. $y = (x^2 + 1)(5-3x^2)$

c. $y = \dfrac{2x}{x^2 - 1}$ d. $y = \dfrac{3 - 5x}{x^2 - x + 1}$

e. $y = \left(m + \dfrac{n}{x^2}\right)^3$ (m, n là các hằng số).

**Hướng dẫn giải chi tiết:**

**a)** Cách 1 :

$y’ = [(x^7 - 5x^2)^3]'$

$= [(x^7)^3 – 3.(x^7)^2.5x^2 + 3.x^7.(5x^2)^2 – (5x^2)^3]’$

$= (x^{21} – 15.x^{16} + 75x^{11} – 125x^6)’$

$= (x^{21})' – (15x^{16})' + (75x^{11})' – (125x^6)'$

$= 21x^{20} – 15.16x^{15} + 75.11x^{10} – 125.6x^5$

$= 21x^{20} – 240x^{15} + 825x^{10} – 750x^5$.

Cách 2 :

$y' = [(x^7 - 5x^2)^3]'$

$= 3.(x^7 – 5x^2)^2.(x^7 – 5x^2)'$ (Đạo hàm của hàm hợp với $u = x^7 – 5x^2$ ; $y = u^3$)

$= 3.(x^7 – 5x^2)^2.[ (x^7)' – (5x^2)']$

$= 3.(x^7 – 5x^2)^2(7x^6 – 5.2x)$

$= 3.(x^7 – 5x^2)^2(7x^6 – 10x)$

**b)** $y' = [(x^2 + 1)(5 – 3x^2)]'$

$= (x^2 + 1)'.(5 – 3x^2) + (x^2 + 1)(5 – 3x^2)'$ (Đạo hàm của tích)

$= [(x^2)' + (1)'](5 – 3x^2) + (x^2 + 1)[(5)' – (3x^2)']$

$= (2x + 0)(5 – 3x^2) + (x^2 + 1)(0 – 3.2x)$

$= 2x.(5 – 3x^2) + (x^2 + 1).(-6x)$

$= 2x.5 – 2x.3x^2 + x^2(-6x) + 1(-6x)$

$= 10x – 6x^3 – 6x^3 – 6x$

$= -12x^3 + 4x$.

c) $y'=\left(\dfrac{2x}{x^2-1}\right)'=\dfrac{(2x)'.(x^2-1)-2x.(x^2-1)'}{(x^2-1)^2}$

( đạo hàm của một thương)

$=\dfrac{2.(x)'.(x^2-1)-2x.[(x^2)'-1']}{(x^2-1)^2}$

$=\dfrac{2.1.(x^2-1)-2x.(2x-0)}{(x^2-1)^2}$

$=\dfrac{2x^2-2-4x^2}{(x^2-1)^2}=\dfrac{-2x^2-2}{(x^2-1)^2}$

$d)y'=\left(\dfrac{3-5x}{x^2-x+1}\right)'$

$=\dfrac{(3-5x)'.(x^2-x+1)-(3-5x).(x^2-x+1)'}{(x^2-x+1)^2}$

( đạo hàm của một thương)

$=\dfrac{[3'-(5x)'].(x^2-x+1)-(3-5x).[(x^2)'-x'+1')]}{(x^2-x+1)^2}$

$=\dfrac{-5.(x^2-x+1)-(3-5x).(2x-1)}{(x^2-x+1)^2}$

$=\dfrac{-5x^2+5x-5-6x+3+10x^2-5x}{(x^2-x+1)^2}$

$=\dfrac{5x^2-6x-2}{(x^2-x+1)^2}$

$$e)\ y' = \left[\left(m + \frac{n}{x^2}\right)^3\right]'$$

$$= 3.\left(m + \frac{n}{x^2}\right)^2.\left(m + \frac{n}{x^2}\right)'$$

$$= 3.\left(m + \frac{n}{x^2}\right)^2.n.\left(\frac{1}{x^2}\right)'$$

$$= 3n\left(m + \frac{n}{x^2}\right)^2.\left[-\frac{(x^2)'}{x^4}\right]$$

$$= 3n\left(m + \frac{n}{x^2}\right)^2.\left(-\frac{2x}{x^4}\right)$$

$$= 3n.\left(m + \frac{n}{x^2}\right)^2.\left(-\frac{2}{x^3}\right)$$

$$= \frac{-6n}{x^3}\left(m + \frac{n}{x^2}\right)^2.$$

**Kiến thức áp dụng**

+ $(x^n)' = n.x^{n-1}$

+ Với u = u(x) ; v = v(x) là các hàm số có đạo hàm tại x thuộc khoảng xác định ta có :

(u + v)’ = u’ + v’

(u – v)’ = u’ – v’

(u.v)’ = u’.v + u.v’.

$\left(\dfrac{u}{v}\right)' = \dfrac{u'.v - u.v'}{v^2} \quad (v(x) \neq 0)$

(k.u)’ = k.u’ (k là hằng số)

$\left(\dfrac{1}{v}\right)' = \dfrac{-v'}{v^2} \ (v(x) \neq 0).$

+ Đạo hàm của hàm hợp:

Hàm số y = f(u) với u = g(x) thì hàm số y = f(g(x)) có đạo hàm:

y’ = f’(u).g’(x).

**Bài 4 (trang 163 SGK Đại số 11):**

Tính đạo hàm của các hàm số sau:

a) $y = x^2 - x\sqrt{x} + 1$;

b) $y = \sqrt{2 - 5x - x^2}$;

c) $y = \dfrac{x^3}{\sqrt{a^2 - x^2}}$ (a là hằng số) ;

d) $y = \dfrac{1+x}{\sqrt{1-x}}$.

**Hướng dẫn giải chi tiết:**

a) $y' = \left(x^2 - x\sqrt{x} + 1\right)'$

$= \left(x^2\right)' - \left(x\sqrt{x}\right)' + (1)'$

$= 2x - \left[(x)'.\sqrt{x} + x.\left(\sqrt{x}\right)'\right]$

$= 2x - \left(\sqrt{x} + x.\frac{1}{2\sqrt{x}}\right)$

$= 2x - \left(\sqrt{x} + \frac{\sqrt{x}}{2}\right)$

$= 2x - \frac{3}{2}\sqrt{x}$ .

b) $y = \sqrt{2 - 5x - x^2}$

$= \frac{1}{2.\sqrt{2 - 5x - x^2}}.\left(2 - 5x - x^2\right)'$

(Đạo hàm của hàm hợp với $u = 2 - 5x - x^2$ và $y = \sqrt{u}$)

$$= \frac{(2)' - (5x)' - (x^2)'}{2\sqrt{2-5x-x^2}}$$

$$= \frac{-5-2x}{2\sqrt{2-5x-x^2}}.$$

c) $y' = \left(\dfrac{x^3}{\sqrt{a^2-x^2}}\right)'$

$$= \frac{(x^3)'\sqrt{a^2-x^2} - x^3.\left(\sqrt{a^2-x^2}\right)'}{\left(\sqrt{a^2-x^2}\right)^2}$$

+ Tính $\left(\sqrt{a^2-x^2}\right)'$

$$= \frac{1}{2\sqrt{a^2-x^2}}.(a^2-x^2)'$$

$$= \frac{1}{2\sqrt{a^2-x^2}}.\left[(a^2)' - (x^2)'\right]$$

$$= \frac{1}{2\sqrt{a^2-x^2}}.(-2x) = \frac{-x}{\sqrt{a^2-x^2}}.$$

$$\Rightarrow y' = \frac{3x^2\sqrt{a^2-x^2} - x^3.\dfrac{-x}{\sqrt{a^2-x^2}}}{a^2-x^2}$$

$$= \frac{3x^2(a^2-x^2)+x^4}{(a^2-x^2).\sqrt{a^2-x^2}} = \frac{3x^2a^2-3x^4+x^4}{(a^2-x^2).\sqrt{a^2-x^2}}$$

$$= \frac{3x^2a^2-2x^4}{(a^2-x^2).\sqrt{a^2-x^2}}$$

d) $y' = \left(\dfrac{1+x}{\sqrt{1-x}}\right)'$

$$= \frac{(1+x)'\sqrt{1-x} - (1+x).\left(\sqrt{1-x}\right)'}{\left(\sqrt{1-x}\right)^2}$$

Ta có: $(1+x)' = (1)' + (x)' = 0 + 1 = 1$

$$\left(\sqrt{1-x}\right)' = \frac{1}{2\sqrt{1-x}}.(1-x)'$$

$$= \frac{1}{2\sqrt{1-x}}.(1' - x') = \frac{1}{2\sqrt{1-x}}.(-1)$$

$$\Rightarrow y' = \frac{\sqrt{1-x} - (1+x).\dfrac{-1}{2\sqrt{1-x}}}{1-x}$$

$$= \frac{\sqrt{1-x}.2\sqrt{1-x} + (1+x)}{(1-x).2\sqrt{1-x}} = \frac{2(1-x)+1+x}{2(1-x).\sqrt{1-x}}$$

$$= \frac{3-x}{2(1-x)\sqrt{1-x}}$$

**Kiến thức áp dụng**

+ $(x^n)' = n.x^{n-1}$

+ Với u = u(x) ; v = v(x) là các hàm số có đạo hàm tại x thuộc khoảng xác định ta có :

(u + v)’ = u’ + v’

(u – v)’ = u’ – v’

(u.v)’ = u’.v + u.v’.

$\left(\dfrac{u}{v}\right)' = \dfrac{u'.v - u.v'}{v^2} \quad (v(x) \neq 0)$

(k.u)' = k.u' (k là hằng số)

$\left(\dfrac{1}{v}\right)' = \dfrac{-v'}{v^2} \quad (v(x) \neq 0).$

+ Đạo hàm của hàm hợp:

Hàm số y = f(u) với u = g(x) thì hàm số y = f(g(x)) có đạo hàm:

y' = f'(u).g'(x).

**Bài 5 (trang 163 SGK Đại số 11):**

Cho $y=x^3-3x^2+2$. Tìm x để:

a. $y' > 0$

b. $y' < 3$

**Hướng dẫn giải chi tiết:**

$y = x^3 – 3x^2 + 2.$

$\Rightarrow y' = (x^3 – 3x^2 + 2)'$

$= (x^3)' – (3x^2)' + (2)'$

$= 3x^2 – 3.2x + 0$

$= 3x^2 – 6x.$

a) y' > 0

$\Leftrightarrow 3x^2 – 6x > 0$

$\Leftrightarrow 3x(x – 2) > 0$

$\Leftrightarrow$ x < 0 hoặc x > 2.

b) y' < 3

⇔ $3x^2 – 6x < 3$

⇔ $3x^2 – 6x – 3 < 0$

⇔ $1- \sqrt{2} < x < 1 + \sqrt{2}$.

**Lý thuyết trọng tâm**

**I. Đạo hàm của một số hàm số thường gặp**

**Định lí 1**

Hàm số $y = x^n$ ($n \in N, n > 1$) có đạo hàm tại mọi $x \in R$ và $(x^n)' = nx^{n-1}$

**Định lí 2**

Hàm số $y = \sqrt{x}$ có đạo hàm tại mọi x dương và $(\sqrt{x}) = \frac{1}{2\sqrt{x}}$

**II. Đạo hàm của tổng, hiệu, tích, thương**

**1. Định lí**

**Định lí 3**

Giả sử u = u(x), v = v(x) là các hàm số có đạo hàm tại điểm x thuộc khoảng xác định. Ta có

$(u + v)' = u' + v'$

$(u – v)' = u' – v'$

$(uv)' = u'v – v'u$

$$\left(\frac{u}{v}\right)' = \frac{u'v - v'u}{v^2} \quad (v = v(x) \neq 0)$$

**2. Hệ quả**

**Hệ quả 1**

Nếu k là một hằng số thì $(ku)' = ku'$.

**Hệ quả 2**

$$\left(\frac{1}{v}\right)' = -\frac{v'}{v^2} \quad (v = v(x) \neq 0).$$

**III. Đạo hàm của hàm hợp**

**Định lí 4**

Nếu hàm số u = g(x) có đạo hàm tại x là $u'_x$ và hàm số y = f(u) có đạo hàm tại u là $y'_u$ thì hàm hợp y = f(g(x)) có đạo hàm tại x là $y'_x = y'_u.u'_x$ .