BÀI 2: DÃY SỐ

Bài 1 (trang 92 SGK Đại số 11):

Viết năm số hạng đầu của dãy số có số hạng tổng quát u_n cho bởi công thức:

a. $u_n = \dfrac{n}{2^n - 1}$ b. $u_n = \dfrac{2^n - 1}{2^n + 1}$

c. $u_n = \left(1 + \dfrac{1}{n}\right)^n$ d. $u_n = \dfrac{n}{\sqrt{n^2 + 1}}$

Hướng dẫn giải chi tiết:

a) $u_n = \dfrac{n}{2^n - 1}$.

$\Rightarrow u_1 = \dfrac{1}{2^1 - 1} = 1$; $u_2 = \dfrac{2}{2^2 - 1} = \dfrac{2}{3}$;

$u_3 = \dfrac{3}{2^3 - 1} = \dfrac{3}{7}$; $u_4 = \dfrac{4}{2^4 - 1} = \dfrac{4}{15}$;

$u_5 = \dfrac{5}{2^5 - 1} = \dfrac{5}{31}$.

b) $u_n = \dfrac{2^n - 1}{2^n + 1}$

$\Rightarrow u_1 = \dfrac{2^1 - 1}{2^1 + 1} = \dfrac{1}{3}$; $u_2 = \dfrac{2^2 - 1}{2^2 + 1} = \dfrac{3}{5}$;

$u_3 = \dfrac{2^3 - 1}{2^3 + 1} = \dfrac{7}{9}$; $u_4 = \dfrac{2^4 - 1}{2^4 + 1} = \dfrac{15}{17}$;

$u_5 = \dfrac{2^5 - 1}{2^5 + 1} = \dfrac{31}{33}$.

c) $u_n = \left(1 + \dfrac{1}{n}\right)^n$

$$\Rightarrow u_1 = \left(1+\frac{1}{1}\right)^1 = 2;$$

$$u_2 = \left(1+\frac{1}{2}\right)^2 = \left(\frac{3}{2}\right)^2 = \frac{9}{4};$$

$$u_3 = \left(1+\frac{1}{3}\right)^3 = \left(\frac{4}{3}\right)^3 = \frac{64}{27};$$

$$u_4 = \left(1+\frac{1}{4}\right)^4 = \left(\frac{5}{4}\right)^4 = \frac{625}{256};$$

$$u_5 = \left(1+\frac{1}{5}\right)^5 = \left(\frac{6}{5}\right)^5 = \frac{7776}{3125}.$$

d) $u_n = \dfrac{n}{\sqrt{n^2+1}}$

$\Rightarrow u_1 = \dfrac{1}{\sqrt{1^2+1}} = \dfrac{1}{\sqrt{2}}$;

$u_2 = \dfrac{2}{\sqrt{2^2+1}} = \dfrac{2}{\sqrt{5}}$;

$u_3 = \dfrac{3}{\sqrt{3^2+1}} = \dfrac{3}{\sqrt{10}}$;

$u_4 = \dfrac{4}{\sqrt{4^2+1}} = \dfrac{4}{\sqrt{17}}$;

$u_5 = \dfrac{5}{\sqrt{5^2+1}} = \dfrac{5}{\sqrt{26}}$.

Bài 2 (trang 92 SGK Đại số 11):

Cho dãy số (u_n), biết $u_1 = -1$, $u_{n+1} = u_n + 3$ với $n \geq 1$.

a) Viết năm số hạng đầu của dãy số;

b) Chứng minh bằng phương pháp quy nạp: $u_n = 3n - 4$

Hướng dẫn giải chi tiết:

a) $u_1 = -1$, $u_{n+1} = u_n + 3$ với $n > 1$

$u_1 = -1$;

$u_2 = u_1 + 3 = -1 + 3 = 2$

$u_3 = u_2 + 3 = 2 + 3 = 5$

$u_4 = u_3 + 3 = 5 + 3 = 8$

$u_5 = u_4 + 3 = 8 + 3 = 11$

b) Chứng minh phương pháp quy nạp: $u_n = 3n – 4$ (1)

+ Khi n = 1 thì $u_1 = 3.1 - 4 = -1$, vậy (1) đúng với n = 1.

+ Giả sử công thức (1) đúng với $n = k > 1$ tức là $u_k = 3k – 4$.

+ Ta chứng minh (1) đúng với n= k+ 1 tức là chứng minh: $u_{k+1} = 3(k+1) - 4$

Thật vậy,ta có : $u_{k+1} = u_k + 3 = 3k – 4 + 3 = 3(k + 1) – 4$.

⇒ (1) đúng với n = k + 1

Vậy (1) đúng với $\forall n \in N^*$.

Bài 3 (trang 92 SGK Đại số 11):

Dãy số (u_n) cho bởi $u_1 = 3$, $u_{n+1} = \sqrt{(1+u_n^2)}$, $n > 1$

a) Viết năm số hạng đầu của dãy số.

b) Dự đoán công thức số hạng tổng quát u_n và chứng minh công thức đó bằng phương pháp quy nạp.

Lời giải:

a) Năm số hạng đầu của dãy số

$u_1 = 3;$

$u_2 = \sqrt{1+u_1^2} = \sqrt{1+3^2} = \sqrt{10};$

$u_3 = \sqrt{1+u_2^2} = \sqrt{1+(\sqrt{10})^2} = \sqrt{11};$

$u_4 = \sqrt{1+u_3^2} = \sqrt{1+(\sqrt{11})^2} = \sqrt{12};$

$u_5 = \sqrt{1+u_4^2} = \sqrt{1+(\sqrt{12})^2} = \sqrt{13};$

b) Dự đoán công thức số hạng tổng quát của dãy số:

$u_n = \sqrt{(n+8)}$ (1)

Rõ ràng (1) đúng với n = 1

Giả sử (1) đúng với n = k, nghĩa là $u_k = \sqrt{(k+8)}$

$\Rightarrow u_{k+1} = \sqrt{1+u_k{}^2} = \sqrt{1+k+8} = \sqrt{(k+1)+8}$

⇒ (1) đúng với n = k + 1

⇒ (1) đúng với mọi n ∈ N*.

Bài 4 (trang 92 SGK Đại số 11): Xét tính tăng, giảm của các dãy số (u_n), biết:

a. $u_n = \frac{1}{n} - 2$ b. $u_n = \frac{n-1}{n+1}$

c. $u_n = (-1)^n(2^n + 1)$ d. $u_n = \frac{2n+1}{5n+2}$

Lời giải:

a. Với mọi n ∈ N ta có:

$$u_{n+1} = \frac{1}{n+1} - 2 < \frac{1}{n} - 2 = u_n$$

⇒ (u_n) là dãy số giảm.

b. $u_n = \frac{n-1}{n+1} = \frac{n+1-2}{n+1} = 1 - \frac{2}{n+1}$

Với mọi n ∈ N có:

$u_{n+1} = 1 - \dfrac{2}{n+2} > 1 - \dfrac{2}{n+1} = u_n$

(Vì $\dfrac{2}{n+2} < \dfrac{2}{n+1}$)

⇒ (u_n) là dãy số tăng.

c. $u_n = (-1)^n.(2^n + 1)$

Nhận xét: $u_1 < 0$, $u_2 > 0$, $u_3 < 0$, $u_4 > 0$, …

⇒ $u_1 < u_2$, $u_2 > u_3$, $u_3 < u_4$, …

⇒ dãy số (u_n) không tăng, không giảm.

d. $u_n = \dfrac{2n+1}{5n+2}, u_{n+1} = \dfrac{2n+3}{5n+7}$

với $n \in N^*$, $n \geq 1$

Xét:

$$u_{n+1} - u_n = \frac{2n+3}{5n+7} - \frac{2n+1}{5n+2}$$

$$= \frac{(2n+3)(5n+2) - (2n+1).(5n+7)}{(5n+7).(5n+2)}$$

$$= \frac{10n^2 + 15n + 4n + 6 - (10n^2 + 14n + 5n + 7)}{(5n+7).(5n+2)}$$

$$= \frac{-1}{(5n+7).(5n+2)} < 0, \forall n \in N^*$$

⇒ $u_{n+1} - u_n < 0$ ⇒ $u_{n+1} < u_n$

Vậy (u_n) là dãy số giảm

Kiến thức áp dụng

Dãy (u_n) được gọi là dãy số tăng nếu $u_{n+1} > u_n$ với mọi $n \in N^*$.

Dãy (u_n) được gọi là dãy số giảm nếu $u_{n+1} < u_n$ với mọi $n \in N^*$.

Bài 5 (trang 92 SGK Đại số 11): Trong các dãy số (u_n) sau, dãy nào bị chặn dưới, bị chặn trên và bị chặn?

a. $u_n = 2n^2 - 1$ b. $u_n = \frac{1}{n(n+2)}$

c. $u_n = \frac{1}{2n^2 - 1}$ d. $u_n = \sin n + \cos n$

Lời giải:

a. $u_n = 2n^2 - 1$

+ Với $n \in N^*$ ta có: $n \geq 1$ và $n^2 \geq 1$

$\Rightarrow u_n = 2n^2 - 1 \geq 2.1^2 - 1 = 1.$

$\Rightarrow u_n \geq 1$

$\Rightarrow$ dãy (u_n) bị chặn dưới $\forall n \in N^*$.

+ (u_n) không bị chặn trên vì không có số M nào thỏa mãn:

$u_n = 2n^2 - 1 \leq M \ \forall n \in N^*$.

Vậy dãy số (u_n) bị chặn dưới và không bị chặn trên nên không bị chặn.

b. Ta có : $u_n = \frac{1}{n(n+2)} > 0 \ \forall n \geq 1$.

$\Rightarrow (u_n)$ bị chặn dưới

$u_n = \frac{1}{n(n+2)} \leq \frac{1}{1.(1+2)} = \frac{1}{3} \ \forall n \geq 1$.

$\Rightarrow (u_n)$ bị chặn trên.

Vậy (u_n) là dãy bị chặn.

c. $u_n = \dfrac{1}{2n^2 - 1}$

+ Ta có : $2n^2 – 1 > 0\ \forall\ n \in N^*$

$\Rightarrow \dfrac{1}{2n^2 - 1} > 0 \quad \forall\ n \in N^*$.

$\Rightarrow (u_n)$ bị chặn dưới.

+ $2n^2 – 1 \ge 2.1 – 1 = 1$

$\Rightarrow \dfrac{1}{2n^2 - 1} \le 1 \quad \forall\ n \in N^*$

$\Rightarrow (u_n)$ bị chặn trên.

Vậy (u_n) bị chặn.

d. $u_n = \sin n + \cos n$.

$$= \sqrt{2}\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\sin n + \frac{1}{\sqrt{2}}\cos n\right)$$

$$= \sqrt{2}\left(\sin\frac{\pi}{4}.\sin n + \cos\ \frac{\pi}{4}.\cos n\right)$$

$$= \sqrt{2}\cos\left(n - \frac{\pi}{4}\right)$$

Với mọi n ta có:

$$-1 \le \cos\left(n - \frac{\pi}{4}\right) \le 1 \Rightarrow -\sqrt{2} \le u_n = \sqrt{2}\cos\left(n - \frac{\pi}{4}\right) \le \sqrt{2}$$

Vậy dãy số (u_n) bị chặn.

Kiến thức áp dụng

Dãy (u_n) được gọi là dãy số tăng nếu $u_{n+1} > u_n\ \forall\ n \in N^*$.

Dãy (u_n) được gọi là dãy số giảm nếu $u_{n+1} < u_n \ \forall n \in N^*$.