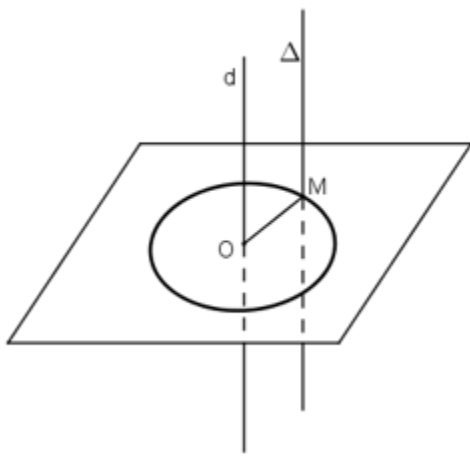


BÀI 1: KHÁI NIỆM MẶT TRÒN XOAY

Bài 1 (trang 39 SGK Hình học 12):

Cho đường tròn tâm O bán kính r nằm trên mặt phẳng (P) . Từ những điểm M nằm trên đường tròn này ta kẻ những đường thẳng vuông góc với (P) . Chứng minh rằng những đường thẳng như vậy nằm trên một mặt trụ tròn xoay. Hãy xác định trục và bán kính của mặt trụ đó.

Hướng dẫn giải chi tiết:



Gọi d là đường thẳng vuông góc với mặt phẳng (P) tại tâm O của đường tròn (T) .

Từ điểm M trên đường tròn (T) , vẽ đường thẳng Δ vuông góc với mặt phẳng (P) .

Khi đó đường thẳng Δ song song với d và luôn cách d một khoảng bằng r .

Đường thẳng Δ thuộc mặt trụ tròn xoay có trục là đường thẳng d và bán kính r .

Bài 2 (trang 39 SGK Hình học 12):

Trong mỗi trường hợp sau đây, hãy gọi tên các hình tròn xoay hoặc khối tròn xoay sinh ra bởi:

- Ba cạnh của hình chữ nhật khi quay quanh đường thẳng chứa cạnh thứ tư,
- Ba cạnh của một tam giác cân khi quay quanh trục đối xứng của nó.
- Một tam giác vuông kể cả các điểm trong của tam giác vuông đó khi quay quanh đường thẳng chứa một cạnh góc vuông.

d) Một hình chữ nhật kẻ cả các điểm trong của hình chữ nhật đó khi quay quanh đường thẳng chứa một cạnh.

Hướng dẫn giải chi tiết:

a) Khi quay một hình chữ nhật xung quanh đường thẳng chứa một cạnh thì ta được một hình trụ

b) Khi quay một tam giác cân xung quanh trục đối xứng của nó ta được một hình nón tròn xoay

c) Một tam giác vuông kẻ cả các điểm trong của nó khi quay xung quanh một đường thẳng chứa một cạnh góc vuông thì tạo ra một khối nón tròn xoay.

d) Một hình chữ nhật kẻ cả các điểm trong của nó khi quay quanh một đường thẳng chứa một cạnh thì tạo ra một khối trụ tròn xoay.

Bài 3 (trang 39 SGK Hình học 12):

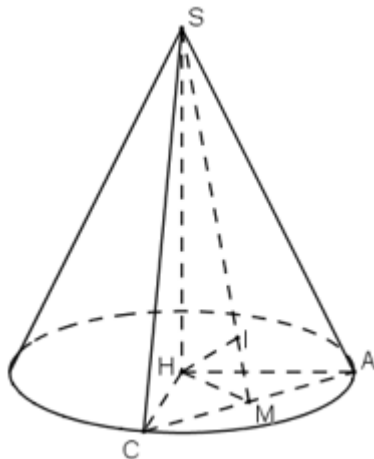
Một hình nón có đường cao $h = 20\text{cm}$, bán kính đáy $r = 25\text{cm}$.

a) Tính diện tích xung quanh của hình nón đã cho.

b) Tính thể tích của khối nón được tạo thành bởi hình nón đó.

c) Một thiết diện đi qua đỉnh của hình nón và khoảng cách từ tâm của đáy đến mặt phẳng thiết diện là 12cm . Tính diện tích thiết diện đó

Hướng dẫn giải chi tiết:



a. Độ dài đường sinh của hình nón đã cho là:

$$l = \sqrt{h^2 + r^2} = \sqrt{20^2 + 25^2} = \sqrt{1025}$$

Diện tích xung quanh của hình nón đã cho là;

$$S = \pi r l = \pi \cdot 25 \cdot \sqrt{1025} \approx 800,39\pi \text{ (cm}^2\text{)}$$

b. Ta có:

$$V = \frac{1}{3} \pi r^2 h = \frac{1}{3} \pi \cdot 25^2 \cdot 20 = \frac{12500\pi}{3} \text{ (cm}^3\text{)}$$

c. Gọi hình nón đã cho có đỉnh là S và H là tâm đường tròn đáy.

Thiết diện đi qua đỉnh S là tam giác SAC (với A và C thuộc đường tròn đáy)

Gọi M là trung điểm của AC.

$$\text{Ta có: } \begin{cases} AC \perp HM \\ AC \perp SH \end{cases} \Rightarrow AC \perp mp(SHM)$$

$$\Rightarrow (SAC) \perp (SHM) \text{ theo giao tuyến SM}$$

$$\text{Trong } mp(SHM) \text{ kẻ } HI \perp SM \Rightarrow HI \perp (SAC)$$

$$\text{Do đó, } d(H; (SAC)) = HI = 12$$

Trong tam giác vuông SHM ta có:

$$\begin{aligned} \frac{1}{HI^2} &= \frac{1}{SH^2} + \frac{1}{HM^2} \Rightarrow \frac{1}{HM^2} = \frac{1}{HI^2} - \frac{1}{SH^2} \\ \Rightarrow \frac{1}{HM^2} &= \frac{1}{12^2} - \frac{1}{20^2} = \frac{1}{225} \Rightarrow HM = 15 \end{aligned}$$

Trong tam giác vuông HAM ta có:

$$AM^2 = HA^2 - HM^2 = 25^2 - 15^2 = 400 \text{ nên } AM = 20 \text{ (cm)}$$

Ta có:

$$\sin \widehat{HSM} = \frac{HM}{SM} = \frac{HI}{SH}$$

$$\Rightarrow SM = \frac{HM.SH}{HI} = \frac{15.20}{12} = 25$$

Do đó, diện tích thiết diện SAC là:

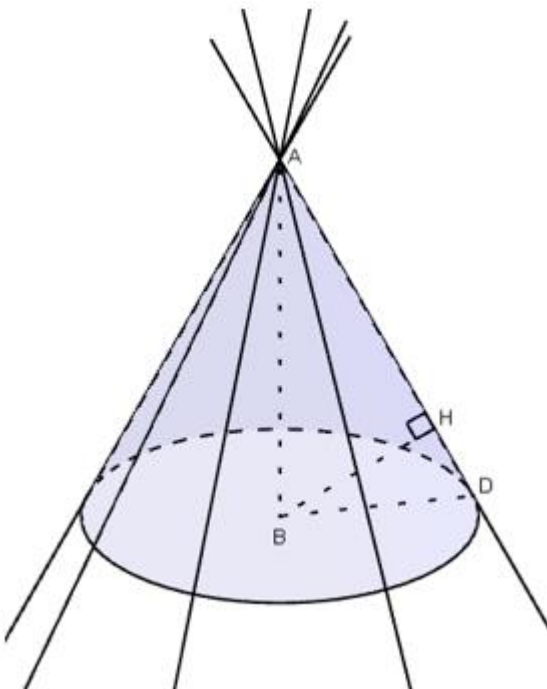
$$S_{SAC} = \frac{1}{2}.AC.SM = AM.SM$$

$$= 20.25 = 500 \text{ cm}^2$$

Bài 4 (trang 39 SGK Hình học 12):

Trong không gian cho hai điểm A, B cố định và có độ dài $AB = 20\text{cm}$. Gọi d là một đường thẳng thay đổi luôn đi qua A và cách B một khoảng bằng 10cm. Chứng tỏ rằng đường thẳng d luôn nằm trên một mặt nón, hãy xác định mặt nón đó (trục và góc ở đỉnh).

Hướng dẫn giải chi tiết:



Từ B vẽ đường thẳng vuông góc với d và cắt d tại H.

Ta có $BH = 10\text{cm} = d(B, d)$

Đặt $\alpha = \widehat{BAH}$

Khi đó:

$$\sin \alpha = \frac{BH}{AB} = \frac{10}{20} = \frac{1}{2} \Rightarrow \alpha = 30^\circ$$

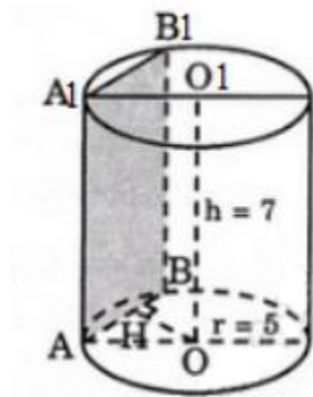
Vậy đường thẳng d nằm trên mặt nón có đỉnh là A , trục là đường thẳng AB và góc ở đỉnh là $2\alpha = 60^\circ$

Bài 5 (trang 39 SGK Hình học 12):

Một hình trụ có bán kính đáy $r = 5\text{cm}$ và có khoảng cách giữa hai đáy bằng 7cm .

- Tính diện tích xung quanh của hình trụ và thể tích của khối trụ tạo nên.
- Cắt khối trụ bởi một mặt phẳng song song với trục và cách trục 3cm . Hãy tính diện tích của thiết diện được tạo nên.

Hướng dẫn giải chi tiết:



- Do khoảng cách hai đáy là nên chiều cao của hình trụ (đồng thời là độ dài đường sinh) là $h = l = 7$.

Diện tích xung quanh của hình trụ là:

$$S_{xq} = 2\pi \cdot r \cdot l = 2\pi \cdot 5 \cdot 7 = 70\pi \text{ (cm}^2 \text{)}.$$

Thể tích của khối trụ được tạo nên là:

$$V = \pi r^2 \cdot h = \pi \cdot 5^2 \cdot 7 = 175\pi \text{ (cm}^3 \text{)}$$

b) Mặt phẳng (P) song song với trục và cách trục 3cm, cắt hình trụ theo thiết diện là tứ giác AA_1B_1B .

Gọi H là trung điểm của AB.

$$\text{Ta có } \begin{cases} OH \perp AB \\ OH \perp AA_1 \end{cases} \Rightarrow OH \perp (AA_1B_1B)$$

Suy ra: $OH = d(O; (AA_1B_1B))$, (1)

Lại có: $OO_1 \parallel mp (AA_1B_1B)$, (2)

Từ (1) và (2) suy ra: $OH = d(O; (AA_1B_1B)) = d(OO_1, (AA_1B_1B)) = 3 \text{ cm}$

* Xét tam giác AOH vuông tại H ta có:

$$AH^2 = AO^2 - OH^2 = 5^2 - 3^2 = 16$$

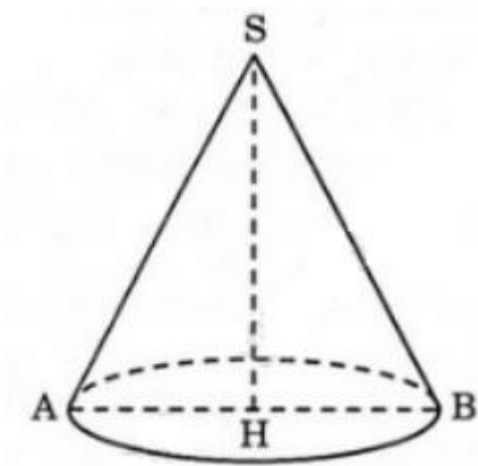
$$\Rightarrow AH = 4\text{cm} \Rightarrow AB = 2AH = 8\text{cm}$$

Diện tích của thiết diện cần tính là :

$$S_{AA_1B_1B} = AB \cdot AA_1 = 8 \cdot 7 = 56 \text{ (cm}^2\text{)}$$

Bài 6 (trang 39 SGK Hình học 12): Cắt một hình nón bằng một mặt phẳng qua trục của nó ta được thiết diện là một tam giác đều cạnh 2a. Tính diện tích xung quanh và thể tích của hình nón đó.

Lời giải:



Tam giác đều SAB cạnh $2a$ là thiết diện qua trục của hình nón.

Khi đó hình nón có bán kính $R = a$, đường sinh $l = 2a$,

$$\text{chiều cao } h = \frac{2a\sqrt{3}}{2} = a\sqrt{3}$$

Vậy diện tích xung quanh của hình nón và thể tích của khối nón là:

$$S_{xq} = \pi Rl = \pi \cdot a \cdot 2a = 2\pi a^2$$

$$V = \frac{1}{3} \pi R^2 h = \frac{1}{3} \pi a^2 \cdot a\sqrt{3} = \frac{\pi a^3 \sqrt{3}}{3}$$

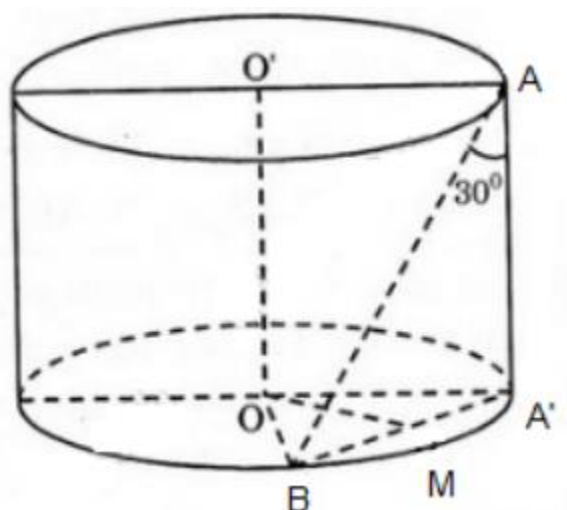
Bài 7 (trang 39 SGK Hình học 12): Một hình trụ có bán kính r và chiều cao $h = r\sqrt{3}$

a) Tính diện tích xung quanh và diện tích toàn phần của hình trụ.

b) Tính thể tích khối trụ tạo nên bởi hình trụ đã cho.

c) Cho hai điểm A và B lần lượt nằm trên hai đường tròn đáy sao cho góc giữa đường thẳng AB và trục của hình trụ bằng 30° . Tính khoảng cách giữa đường thẳng AB và trục của hình trụ.

Lời giải:



a) Diện tích xung quanh và diện tích toàn phần

của hình trụ là: $S_{xq} = 2\pi rh = 2\pi r \cdot r\sqrt{3} = 2\pi r^2 \sqrt{3}$

$S_{tp} = S_{xq} + 2S_{đáy} = 2\pi r^2 \sqrt{3} + 2\pi r^2 = 2\pi(\sqrt{3} + 1) r^2$

b) Thể tích khối trụ tạo nên bởi hình trụ đã cho là:

$V = \pi r^2 h = \pi r^2 \cdot r\sqrt{3} = \pi r^3 \sqrt{3}$

c. Vẽ đường thẳng AA' ($AA' \parallel OO'$) a

Ta có: $(AB; OO') = (AB, AA') = \widehat{BAA'} = 30^\circ$

Gọi M là trung điểm của $A'B$.

Ta có: $\begin{cases} OM \perp A'B \\ OM \perp AA' \end{cases} \Rightarrow OM \perp (AA'B)$

Suy ra: $d(O; (AA'B)) = OM$.

* Tính OM:

Xét tam giác vuông $AA'B$ có:

$$A'B = AA' \cdot \tan 30^\circ = r\sqrt{3} \cdot \frac{\sqrt{3}}{3} = r$$

$$\Rightarrow A'M = \frac{A'B}{2} = \frac{r}{2}$$

Xét tam giác OMA' có:

$$OM^2 = OA'^2 - MA'^2 = r^2 - \left(\frac{r}{2}\right)^2 = \frac{3r^2}{4}$$

$$\Rightarrow OM = \frac{r\sqrt{3}}{2}$$

+ Ta có: $OO' \parallel AA'$ nên:

$d(OO', AB)$

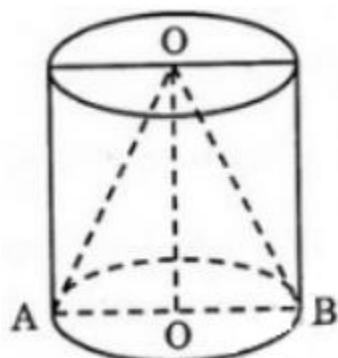
$$= d(OO'; (AA'B)) = OM = \frac{r\sqrt{3}}{2}$$

Bài 8 (trang 40 SGK Hình học 12): Một hình trụ có hai đáy là hai hình tròn $(O; r)$ và $(O'; r)$. Khoảng cách giữa hai đáy là $OO' = r\sqrt{3}$. Một hình nón có đỉnh là O' và có đáy là hình tròn $(O; r)$.

a) Gọi S_1 là diện tích xung quanh của hình trụ và S_2 là diện tích xung quanh của hình nón, hãy tính tỉ số S_1/S_2 .

b) Mặt xung quanh của hình nón chia khối trụ thành hai phần, hãy tính tỉ số thể tích hai phần đó.

Lời giải:



a)Ta có:

- Hình trụ và hình nón có chiều cao $h = r\sqrt{3}$, bán kính bằng r.
- Hình nón có đường sinh:

$$l = \sqrt{h^2 + r^2} = \sqrt{3r^2 + r^2} = 2r$$

Vậy diện tích xung quanh của hình trụ là:

$$S_1 = 2\pi rh = 2\pi r^2 \sqrt{3}$$

Và hình nón là : $S_2 = \pi rl = 2\pi r^2$

Suy ra $\frac{S_1}{S_2} = \sqrt{3}$

b. Thể tích của khối trụ là:

$$V_{trụ} = \pi r^2 \cdot h = \pi r^2 \cdot r\sqrt{3} = \pi r^3 \sqrt{3}$$

Thể tích của khối nón là:

$$V_{nón} = \frac{1}{3} \pi r^2 \cdot h = \frac{1}{3} \pi r^2 \cdot r\sqrt{3} = \frac{\sqrt{3}}{3} \pi r^3$$

Thể tích của khối trụ nằm ngoài khối nón là:

$$V = V_{trụ} - V_{nón} = \pi r^3 \sqrt{3} - \frac{\sqrt{3}}{3} \pi r^3 = \frac{2\sqrt{3}}{3} \pi r^3$$

Mặt xung quanh của hình nón

chia khối trụ thành hai phần,

tỉ số thể tích hai phần đó là:

$$\frac{V}{V_{nón}} = \frac{\frac{2\sqrt{3}}{3} \pi r^3}{\frac{\sqrt{3}}{3} \pi r^3} = 2$$

Bài 9 (trang 40 SGK Hình học 12): Cắt hình nón đỉnh S bởi mặt phẳng đi qua trục ta được một tam giác vuông cân có cạnh huyền bằng $a\sqrt{2}$

a)Tính diện tích xung quanh, diện tích đáy và thể tích của khối nón tương ứng.

b) Cho dây cung BC của đường tròn đáy hình nón sao cho mặt phẳng (SBC) tạo với mặt phẳng chứa đáy hình nón góc 60° . Tính diện tích tam giác SBC.

Lời giải:

a) Ta có thiết diện qua trục của hình nón là

tam giác vuông cân SAB, cạnh huyền $AB = a\sqrt{2}$.

Vậy đường cao, bán kính và đường sinh của hình nón là:

$$h = SO = \frac{AB}{2} = \frac{a\sqrt{2}}{2}$$

$$r = \frac{AB}{2} = \frac{a\sqrt{2}}{2}$$

$$l = SA = a\sqrt{2} \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} = a$$

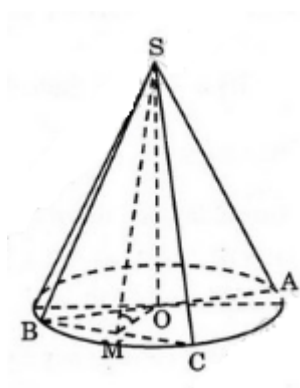
Diện tích xung quanh và diện tích toàn phần của hình nón là:

$$S_{xq} = \pi r l = \pi \cdot \frac{a\sqrt{2}}{2} \cdot a = \frac{\pi a^2 \sqrt{2}}{2}$$

$$S_{tp} = S_{xq} + S_{day} = \frac{\pi a^2 \sqrt{2}}{2} + \pi r^2$$

Thể tích của khối nón là:

$$V = \frac{1}{3} \pi r^2 h = \frac{1}{3} \pi \left(\frac{a\sqrt{2}}{2} \right)^2 \cdot \frac{a\sqrt{2}}{2} = \frac{\pi a^3 \sqrt{2}}{12}$$



b. Ta có:

$$\begin{cases} SO \perp BC \\ OM \perp BC \end{cases} \Rightarrow BC \perp mp(SMO)$$

$$\Rightarrow BC \perp SM (1).$$

Mà 2 mp(SMO) và (SBC)

cắt nhau theo giao tuyến SM (2)

Từ (1) và (2) suy ra,

góc giữa hai mp(SMO) và (SBC) là:

$$\widehat{SMO} = 60^0$$

Xét tam giác SMO ta có:

$$SM = \frac{SO}{\sin \widehat{SMO}} = \frac{\frac{a\sqrt{2}}{2}}{\sin 60^0} = a \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}}$$

$$\text{và } OM = SO \cdot \cot \widehat{SMO} = \frac{a\sqrt{2}}{2} \cdot \cot 60^0 = \frac{a\sqrt{6}}{6}$$

+ Xét tam giác OBM vuông tại M nên :

$$\begin{aligned} BM &= \sqrt{OB^2 - OM^2} \\ &= \sqrt{\left(\frac{a\sqrt{2}}{2}\right)^2 - \left(\frac{a\sqrt{6}}{6}\right)^2} = \frac{a}{\sqrt{3}} \end{aligned}$$

$$\Rightarrow BC = 2BM = \frac{2a}{\sqrt{3}}$$

Diện tích tam giác SBC là:

$$S = \frac{1}{2} SM \cdot BC = \frac{1}{2} \cdot \frac{a\sqrt{2}}{\sqrt{3}} \cdot \frac{2a}{\sqrt{3}} = \frac{a^2 \sqrt{2}}{3}$$

Bài 10 (trang 40 SGK Hình học 12): Cho hình trụ có bán kính r và có chiều cao cũng bằng r . Hình vuông $ABCD$ có hai cạnh AB và CD lần lượt là các dây cung của hai đường tròn đáy, còn cạnh BC và AD không phải là đường sinh của hình trụ. Tính diện tích của hình vuông đó và cosin của góc giữa mặt phẳng chứa hình vuông và mặt phẳng đáy.

Lời giải:

Gọi CC_1 và DD_1 là hai đường sinh của khối trụ

Khi đó $D_1C_1 \parallel DC$ (1)

Đồng thời $ABCD$ là hình vuông nên $AB \parallel DC$ (2)

Từ (1) và (2) suy ra $AB \parallel D_1C_1$

Vậy ABC_1D_1 là hình bình hành

Mặt khác ABC_1D_1 nội tiếp đường tròn (O) nên ABC_1D_1

là hình chữ nhật. Suy ra AC_1 là đường kính của (O)

Nghĩa là $AC_1 = 2r$

Tam giác ABC_1 vuông ở B nên:

$$BC_1^2 = AC_1^2 - AB^2 = 4r^2 - AB^2 \quad (3)$$

Tam giác BCC_1 vuông ở C_1 nên:

$$BC_1^2 = BC^2 - CC_1^2 = AB^2 - r^2 \quad (4)$$

$$\text{Từ (3) và (4) suy ra } 4r^2 - AB^2 = AB^2 - r^2 \Leftrightarrow AB^2 = \frac{5r^2}{2}$$

$$\text{Vậy diện tích của hình vuông } ABCD \text{ là } S = AB^2 = \frac{5r^2}{2}$$

*Gọi α là góc hợp bởi $mp(ABCD)$ và mặt phẳng đáy

$$\text{của hình trụ, ta có: } S = S_{ABCD} = \frac{5r^2}{2}, S' = S_{ABC_1D_1} = AB \cdot BC_1$$

$$\text{Với } BC_1 = \sqrt{AC_1^2 - AB^2} = \sqrt{(2r)^2 - \frac{5r^2}{2}} = r\sqrt{\frac{3}{2}}$$

$$\Rightarrow S' = \frac{r\sqrt{10}}{2} \cdot r\sqrt{\frac{3}{2}} = \frac{r^2}{2} \sqrt{15}$$

Mà ABC_1D_1 là hình chiếu của $ABCD$ trên mặt đáy hình trụ nên:

$$S' = S \cdot \cos \alpha \Leftrightarrow \cos \alpha = \frac{S'}{S} = \frac{r^2 \sqrt{15}}{2} : \frac{5r^2}{2} = \frac{\sqrt{15}}{5}$$