BÀI 1 (TRANG 82 SGK ĐẠI SỐ 11):

Chứng minh rằng với n ∈ N*, ta có các đẳng thức:

a) $2+5+8+..+3n-1=\dfrac{n(3n+1)}{2}$ (1)

b) $\dfrac{1}{2}+\dfrac{1}{4}+\dfrac{1}{8}+...+\dfrac{1}{2^n}=\dfrac{2^n-1}{2^n}$ (2)

c) $1^2+2^2+3^2+....+n^2=\dfrac{n(n+1).(2n+1)}{6}$ (3)

Hướng dẫn giải chi tiết:

a. + Với n = 1, ta có:

VT = 3 – 1 = 2

$$VP=\frac{1(3.1+1)}{2}=2$$

⇒ VT = VP

⇒ (1) đúng với n = 1

+ Giả sử (1) đúng với n = k ≥ 1 nghĩa là:

2 + 5 + 8 + …+ (3k – 1) = k(3k + 1)/2. (*)

Ta cần chứng minh (1) đúng với n = k + 1, tức là :

$$2+5+8+...+(3k-1)+[3(k+1)-1]=\frac{(k+1).[3(k+1)+1]}{2}$$

Thật vậy :

Ta có :

$2 + 5 + 8 + \ldots + (3k - 1) + [3.(k + 1) - 1]$

$= \dfrac{k(3k+1)}{2} + [3(k+1)-1]$ (do (*)

$= \dfrac{k(3k+1)+6(k+1)-2}{2} = \dfrac{3k^2+k+6k+6-2}{2}$

$= \dfrac{3k^2+7k+4}{2} = \dfrac{(k+1).(3k+4)}{2}$

$= \dfrac{(k+1).[3(k+1)+1]}{2}; (dpcm)$

Vậy $2+5+8+..+3n-1 = \dfrac{n(3n+1)}{2}$

b) + Với n = 1 :

$VT = \dfrac{1}{2^1} = \dfrac{1}{2}$; $VP = \dfrac{2^1-1}{2^1} = \dfrac{1}{2}$

Vậy (2) đúng với n = 1

+ Giả sử đẳng thức đúng với n = k, tức là:

$\dfrac{1}{2} + \dfrac{1}{4} + \ldots + \dfrac{1}{2^k} = \dfrac{2^k-1}{2^k}$

Cần chứng minh (2) đúng với n = k + 1, tức là:

$\dfrac{1}{2} + \dfrac{1}{4} + \ldots + \dfrac{1}{2^{k+1}} = \dfrac{2^{k+1}-1}{2^{k+1}}$

Thật vậy, ta có :

$\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+...+\frac{1}{2^{k+1}}$

$=\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+...+\frac{1}{2^{k}}+\frac{1}{2^{k+1}}$

$=\frac{2^{k}-1}{2^{k}}+\frac{1}{2^{k+1}}$

$=\frac{2.\left(2^{k}-1\right)+1}{2^{k+1}}$

$=\frac{2^{k+1}-2+1}{2^{k+1}}$

$=\frac{2^{k+1}-1}{2^{k+1}}$.

$\Rightarrow$ (2) đúng với n = k + 1.

Vậy $\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+...+\frac{1}{2^{n}}=\frac{2^{n}-1}{2^{n}}$

c. + Với n = 1 :

VT = 1 ;

VP = $\frac{1.(1+1).(2.1+1)}{6}=1$

$\Rightarrow$ (3) đúng với n = 1

+ Giả sử đẳng thức (3) đúng với n = k nghĩa là :

$$1^{2}+2^{2}+3^{2}+...+k^{2}=\frac{k(k+1)(2k+1)}{6}$$

Cần chứng minh (3) đúng khi n = k + 1, tức là:

$1^2+2^2+3^2+...+(k+1)^2$

$=\dfrac{(k+1).(k+2)(2k+3)}{6}$

Thật vậy:

$1^2+2^2+3^2+...+(k+1)^2$

$=1^2+2^2+3^2+...+k^2+(k+1)^2$

$=\dfrac{k(k+1)(2k+1)}{6}+(k+1)^2$

$=\dfrac{k(k+1)(2k+1)+6(k+1)^2}{6}$

$=\dfrac{(k+1)[k(2k+1)+6(k+1)]}{6}$

$=\dfrac{(k+1)(2k^2+k+6k+6)}{6}$

$=\dfrac{(k+1)(2k^2+7k+6)}{6}$

$=\dfrac{(k+1)(k+2)(2k+3)}{6}$

$\Rightarrow$ (3) đúng với $n=k+1$.

Vậy $1^2+2^2+3^2+...+n^2=\dfrac{n(n+1)(2n+1)}{6}$

Kiến thức áp dụng

Chứng minh mệnh đề (P) đúng với mọi n ∈ N bằng phương pháp quy nạp:

+ Kiểm tra mệnh đề (P) có đúng với n = 1 không.

+ Giả sử (P) đúng với n = k, cần chứng minh nó cũng đúng với n = k + 1.