

## BÀI 3: HÀM SỐ LÔGARIT

### TRẢ LỜI CÂU HỎI:

#### Câu hỏi trang 61:

Tìm x để:

a)  $2^x = 8$ ;

b)  $2^x = 1/4$ ;

c)  $3^x = 81$ ;

d)  $5^x = 1/125$ .

#### Lời giải:

a)  $2^x = 8 \Leftrightarrow 2^x = 2^3 \Leftrightarrow x = 3$ .

b)  $2^x = 1/4 \Leftrightarrow 2^x = 2^{-2} \Leftrightarrow x = -2$ .

c)  $3^x = 81 \Leftrightarrow 3^x = 3^4 \Leftrightarrow x = 4$ .

d)  $5^x = 1/125 \Leftrightarrow 5^x = 5^{-3} \Leftrightarrow x = -3$ .

**Câu hỏi trang 62:**

a) Tính  $\log_{1/2}4, \log_3 1/27$ .

b) Có các số  $x, y$  nào để  $3^x = 0, 2^y = -3$  hay không ?

**Lời giải:**

a)  $\log_{1/2}4 = -2, \log_3 1/27 = -3$ .

b) Không có số  $x, y$  nào để  $3^x = 0, 2^y = -3$  vì  $3^x > 0, 2^y > 0$  với mọi  $x, y$ .

**Trả lời câu hỏi Toán 12 Giải tích Bài 3 trang 62:** Hãy chứng minh các tính chất trên

$$\log_a 1 = \log_a a^0 = 0$$

$$\log_a a = \log_a a^1 = 1$$

**Lời giải:**

Ta có:

$a^{\log_a b} = a^\alpha$  với  $\alpha = \log_a b$ . Từ định nghĩa ta có  $a^\alpha = b$  nên  $a^{\log_a b} = a^\alpha = b$ .

Đặt  $\log_a a^\alpha = b$ . Theo định nghĩa  $a^\alpha = a^b$  nên  $\alpha = b$ . Vậy  $\log_a a^\alpha = b = \alpha$ .

**Câu hỏi trang 63:**

$$\text{Tính } 4^{\log_2 \frac{1}{2}}, \left(\frac{1}{25}\right)^{\log_5 \frac{1}{3}}.$$

**Lời giải:**

$$4^{\log_2 \frac{1}{2}} = 2^{2 \cdot \log_2 \frac{1}{2}} = (2^{\log_2 \frac{1}{2}})^2 = \left(\frac{1}{2}\right)^2 = \frac{1}{4}.$$

$$\left(\frac{1}{25}\right)^{\log_5 \frac{1}{3}} = (5)^{-2 \cdot \log_5 \frac{1}{3}} = (5^{\log_5 \frac{1}{3}})^{-2} = \left(\frac{1}{3}\right)^{-2} = 9$$

Cho  $b_1 = 2^3$ ,  $b_2 = 2^5$

Tính  $\log_2 b_1 + \log_2 b_2$ ;  $\log_2 b_1 b_2$  và so sánh các kết quả.

**Lời giải:**

$$\log_2 b_1 + \log_2 b_2 = \log_2 2^3 + \log_2 2^5 = 3 + 5 = 8.$$

$$\log_2 (b_1 b_2) = \log_2 (2^3 \cdot 2^5) = \log_2 (2^{3+5}) = \log_2 (2^8) = 8.$$

$$\text{Vậy } \log_2 b_1 + \log_2 b_2 = \log_2 b_1 b_2$$

**Trả lời câu hỏi Toán 12 Giải tích Bài 3 trang 64:** Tính  $\log_{1/2}2 + 2\log_{1/2}1/3 + \log_{1/2}3/8$ .

**Lời giải:**

$$\begin{aligned}\log_{1/2}2 + 2\log_{1/2}1/3 + \log_{1/2}3/8 \\ &= \log_{1/2}2 + \log_{1/2}1/3 + \log_{1/2}1/3 + \log_{1/2}3/8 \\ &= \log_{1/2}(2 \cdot 1/3 \cdot 1/3 \cdot 3/8) = \log_{1/2}1/12.\end{aligned}$$

**Trả lời câu hỏi Toán 12 Giải tích Bài 3 trang 64:** Cho  $b_1 = 2^5$ ,  $b_2 = 2^3$ . Tính  $\log_2 b_1 - \log_2 b_2$ ,  $\log_2 b_1/b_2$  và so sánh các kết

**Lời giải:**

$$\log_2 b_1 - \log_2 b_2 = \log_2 2^5 - \log_2 2^3 = 5 - 3 = 2$$

$$\log_2 \frac{b_1}{b_2} = \log_2 \frac{2^5}{2^3} = \log_2 2^2 = 2.$$

$$\text{Vậy } \log_2 b_1 - \log_2 b_2 = \log_2 \frac{b_1}{b_2}$$

**Trả lời câu hỏi Toán 12 Giải tích Bài 3 trang 65:** Cho  $a = 4$ ,  $b = 64$ ,  $c = 2$ .  
Tính  $\log_a b$ ,  $\log_c a$ ,  $\log_c b$ .

Tìm một hệ thức liên hệ giữa ba kết quả thu được.

**Lời giải:**

$$\log_a b = \log_4 64 = \log_4 4^3 = 3.$$

$$\log_c a = \log_2 4 = 2.$$

$$\log_c b = \log_2 64 = \log_2 2^6 = 6.$$

$$\text{Vậy } \log_c b = \log_c a \cdot \log_a b$$

**BÀI TẬP:**

**Bài 1 (trang 68 SGK Giải tích 12):**

Không sử dụng máy tính, hãy tính:

a)  $\log_2 \frac{1}{8}$ ;

b)  $\log_{\frac{1}{4}} 2$ ;

c)  $\log_3 \sqrt[4]{3}$ ;

d)  $\log_{0,5} 0,125$ .

**Hướng dẫn giải chi tiết:**

$$a) \log_2 \frac{1}{8}$$

$$= \log_2 (2^{-3}) = -3 \cdot \log_2 2 = -3$$

$$b) \log_{\frac{1}{4}} 2$$

$$= \log_{2^{-2}} 2 = \frac{1}{-2} \cdot \log_2 2 = -\frac{1}{2}$$

$$c) \log_3 \sqrt[4]{3}$$

$$= \log_3 3^{\frac{1}{4}} = \frac{1}{4} \cdot \log_3 3 = \frac{1}{4}$$

$$d) \log_{0,5} 0,125$$

$$= \log_{0,5} (0,5)^3 = 3 \cdot \log_{0,5} 0,5 = 3$$

### Kiến thức áp dụng:

$$+ \log_a b^\alpha = \alpha \cdot \log_a b;$$

$$+ \log_{a^\alpha} b = \frac{1}{\alpha} \cdot \log_a b.$$

$$+ \log_a a = 1.$$

### Bài 2 (trang 68 SGK Giải tích 12):

Tính:

$$a) 4^{\log_2 3};$$

$$b) 27^{\log_9 2};$$

$$c) 9^{\log_{\sqrt{3}} 2};$$

$$d) 4^{\log_8 27}.$$

**Hướng dẫn giải chi tiết:**

$$27^{\log_9 2} = 3^{3 \cdot \log_3 \sqrt{2}} = \left(3^{\log_3 \sqrt{2}}\right)^3$$

$$= (\sqrt{2})^3 = 2\sqrt{2}.$$

a)  $4^{\log_2 3}$

$$= (2^2)^{\log_2 3} = 2^{2 \cdot \log_2 3}$$

$$= (2^{\log_2 3})^2 = 3^2 = 9.$$

c)  $9^{\log_{\sqrt{3}} 2} = (\sqrt{3}^4)^{\log_{\sqrt{3}} 2} = (\sqrt{3})^{4 \cdot \log_{\sqrt{3}} 2}$

$$= \left[ (\sqrt{3})^{\log_{\sqrt{3}} 2} \right]^4 = 2^4 = 16.$$

b) Ta có:

$$\log_8 27 = \log_{2^3} 3^3 = \frac{1}{3} \cdot 3 \cdot \log_2 3 = \log_2 3$$

$\log_9 2$

$$= \log_{3^2} 2 = \frac{1}{2} \log_3 2 = \log_3 \sqrt{2}$$

Do đó:  $4^{\log_8 27} = 4^{\log_2 3} = (2^2)^{\log_2 3}$

Do đó:

$$= (2^{\log_2 3})^2 = 3^2 = 9.$$

**Kiến thức áp dụng:**

+  $\log_a b^\alpha = \alpha \cdot \log_a b$ ;

+  $\log_{a^\alpha} b = \frac{1}{\alpha} \cdot \log_a b$ .

+  $a^{\log_a b} = b$ .

**Bài 3 (trang 68 SGK Giải tích 12):** Rút gọn biểu thức:

a)  $\log_3 6 \cdot \log_8 9 \cdot \log_6 2$ ;

b)  $\log_a b^2 + \log_{a^2} b^4$ .

**Lời giải:**

$$\begin{aligned}
 & \text{a) } \log_3 6 \cdot \log_8 9 \cdot \log_6 2 \\
 & = (\log_3 6 \cdot \log_6 2) \cdot \log_8 9 \\
 & = \log_3 2 \cdot \log_8 9 \\
 & = \log_3 2 \cdot \log_{2^3} 3^2 \\
 & = \log_3 2 \cdot \frac{2}{3} \cdot \log_2 3 \\
 & = \frac{2}{3} \cdot (\log_3 2 \cdot \log_2 3) \\
 & = \frac{2}{3}
 \end{aligned}$$

b) Điều kiện:  $a > 0$

$$\begin{aligned}
 & \log_a b^2 + \log_{a^2} b^4 \\
 & = 2\log_a |b| + 4 \cdot \frac{1}{2} \log_a |b| \\
 & = 2\log_a |b| + 2\log_a |b| \\
 & = 4\log_a |b|
 \end{aligned}$$

### Kiến thức áp dụng

Với  $a > 0$ ;  $a \neq 1$  và  $b > 0$  ta có:

$$+ \log_a b^\alpha = \alpha \cdot \log_a b;$$

$$+ \log_{a^\alpha} b = \frac{1}{\alpha} \cdot \log_a b$$

$$+ \log_a b \cdot \log_b c = \log_a c,$$

$$\text{đặc biệt: } \log_a b \cdot \log_b a = 1$$

**Bài 4 (trang 68 SGK Giải tích 12):** So sánh các cặp số sau:



a)  $\log_3 5$  và  $\log_7 4$ ;

b)  $\log_{0,3} 2$  và  $\log_5 3$ ;

c)  $\log_2 10$  và  $\log_5 30$ .

**Lời giải:**

a) Đặt  $\log_3 5 = \alpha$  ;  $\log_7 4 = \beta$ .

$$3^\alpha = 3^{\log_3 5} = 5 > 3^1 \Rightarrow \alpha > 1.$$

$$7^\beta = 7^{\log_7 4} = 4 < 7^1 \Rightarrow \beta < 1$$

Do đó  $\alpha > \beta$ .

b) Đặt  $\log_{0,3} 2 = \alpha$ ;  $\log_5 3 = \beta$ .

$$0,3^\alpha = 0,3^{\log_{0,3} 2} = 2 > 0,3^0$$

Mà  $0 < 0,3 < 1$  nên  $\alpha < 0$  (1)

$$\text{Lại có: } 5^\beta = 5^{\log_5 3} = 3 > 5^0 \Rightarrow \beta > 0 \text{ (2)}$$

Từ (1) và (2) suy ra :  $\alpha < \beta$  .

c) Đặt  $\log_2 10 = \alpha$ ;  $\log_5 30 = \beta$ . Ta có :

$$2^\alpha = 2^{\log_2 10} = 10 > 2^3 \Rightarrow \alpha > 3.$$

$$5^\beta = 5^{\log_5 30} = 30 < 5^3 \Rightarrow \beta < 3$$

Do đó:  $\alpha > \beta$ .

**Kiến thức áp dụng**

$$+ a^{\log_a b} = b.$$

$$+ \text{Nếu } \begin{cases} \alpha < a \\ \beta > a \end{cases} \Rightarrow \alpha < \beta$$

$$+ \text{Nếu } a^\alpha < a^\beta \Rightarrow \begin{cases} a > 1: \alpha < \beta \\ 0 < a < 1: \alpha > \beta \end{cases}$$

**Bài 5 (trang 68 SGK Giải tích 12):** a) Cho  $a = \log_{30}3$ ;  $b = \log_{30}5$

Hãy tính  $\log_{30}1350$  theo  $a, b$ .

b) Cho  $c = \log_{15}3$ . Hãy tính  $\log_{25}15$  theo  $c$ .

**Lời giải:**

$$a) \log_{30}1350 = \log_{30}(30 \cdot 3^2 \cdot 5)$$

$$= \log_{30}30 + \log_{30}3^2 + \log_{30}5$$

$$= \log_{30}30 + 2 \cdot \log_{30}3 + \log_{30}5$$

$$= 1 + 2a + b.$$

$$b) \text{Ta có: } c = \log_{15}3$$

$$\Rightarrow \frac{1}{c} = \log_3 15 = \log_3(3 \cdot 5)$$

$$= \log_3 3 + \log_3 5 = 1 + \log_3 5$$

$$\text{Do đó, } \log_3 5 = \frac{1}{c} - 1 = \frac{1-c}{c}.$$

$$\Rightarrow \log_5 3 = \frac{c}{1-c}$$

Do đó:

$$\log_{25}15$$

$$= \log_{5^2}15 = \frac{1}{2} \log_5 15$$

$$= \frac{1}{2} \cdot \log_5(3 \cdot 5)$$

$$= \frac{1}{2} \cdot (\log_5 3 + \log_5 5)$$

$$= \frac{1}{2} \left( \frac{c}{1-c} + 1 \right) = \frac{1}{2(1-c)}$$

**Kiến thức áp dụng**

$$+ \log_a b^\alpha = \alpha \cdot \log_a b;$$

$$+ \log_{a^\alpha} b = \frac{1}{\alpha} \cdot \log_a b$$

$$+ \log_a (b \cdot c) = \log_a b + \log_a c$$

$$+ \log_a b = \frac{1}{\log_b a}$$

## LÝ THUYẾT LÔGARIT

### A. Tóm tắt lý thuyết

#### 1. Định nghĩa:

Cho hai số dương  $a, b$  với  $a \neq 1$ . Số  $\alpha$  thỏa mãn đẳng thức  $a^\alpha = b$  được gọi là lôgarit cơ số  $a$  của  $b$  và kí hiệu là  $\log_a b$ . Ta viết:  $\alpha = \log_a b \Leftrightarrow a^\alpha = b$ .

#### 2. Các tính chất:

Cho  $a, b > 0, a \neq 1$  ta có:

$$- \log_a a = 1, \log_a 1 = 0$$

$$- a^{\log_a b} = b, \log_a (a^\alpha) = \alpha$$

#### 3. Lôgarit của một tích:

Cho 3 số dương  $a, b_1, b_2$  với  $a \neq 1$ , ta có

$$- \log_a (b_1 \cdot b_2) = \log_a b_1 + \log_a b_2$$

#### 4. Lôgarit của một thương:

Cho 3 số dương  $a, b_1, b_2$  với  $a \neq 1$ , ta có

$$- \log_a \frac{b_1}{b_2} = \log_a b_1 - \log_a b_2$$

$$\log_a \frac{1}{b} = -\log_a b$$

- Đặc biệt : với  $a, b > 0, a \neq 1$

#### 5. Lôgarit của lũy thừa:

Cho  $a, b_1, b_2, a \neq 1$ , với mọi  $\alpha$ , ta có

$$- \log_a b^\alpha = \alpha \log_a b$$

$$\log_a \sqrt[n]{b} = \frac{1}{n} \log_a b$$

- Đặc biệt:

**6. Công thức đổi cơ số:** Cho 3 số dương  $a, b, c$  với  $a \neq 1, c \neq 1$ , ta có

$$\log_a b = \frac{\log_c b}{\log_c a}$$

-

$$\log_a c = \frac{1}{\log_c a} \quad \text{và} \quad \log_{a^\alpha} b = \frac{1}{\alpha} \log_a b$$

- Đặc biệt :

với  $\alpha \neq 0$ .

+ Lôgarit thập phân và Lôgarit tự nhiên

+ Lôgarit thập phân là lôgarit cơ số 10. Viết:  $\log_{10} b = \log b = \lg b$

+ Lôgarit tự nhiên là lôgarit cơ số e. Viết:  $\log_e b = \ln b$

B. Kỹ năng giải bài tập

1. Tính giá trị biểu thức

2. Rút gọn biểu thức

3. So sánh hai biểu thức

4. Biểu diễn giá trị logarit qua một hay nhiều giá trị logarit khác