

CHUYÊN ĐỀ 3 **GIÁ TRỊ LỚN NHẤT – GIÁ TRỊ NHỎ NHẤT CỦA HÀM SỐ**

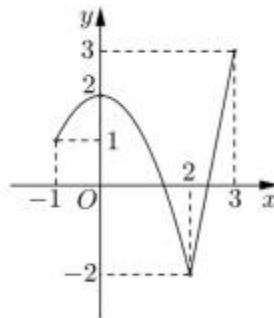
MỤC LỤC

PHẦN A. CÂU HỎI	1
Dạng 1. Xác định giá trị lớn nhất – giá trị nhỏ nhất của hàm số thông qua đồ thị của nó.....	1
Dạng 2. Xác định giá trị lớn nhất – giá trị nhỏ nhất của hàm số trên đoạn [a;b].....	7
Dạng 3. Xác định giá trị lớn nhất – giá trị nhỏ nhất của hàm số trên khoảng (a;b).....	8
Dạng 4. Ứng dụng GTLN-GTNN vào bài toán thực tế.....	9
Dạng 5. Định m để GTLN-GTNN của hàm số thỏa mãn điều kiện cho trước.....	11
Dạng 6. Bài toán GTLN-GTNN liên quan đến đồ thị đạo hàm.....	13
Dạng 7. Ứng dụng GTLN-GTNN vào bài toán đại số.....	18
PHẦN B. LỜI GIẢI THAM KHẢO	19
Dạng 1. Xác định giá trị lớn nhất – giá trị nhỏ nhất của hàm số thông qua đồ thị của nó.....	19
Dạng 2. Xác định giá trị lớn nhất – giá trị nhỏ nhất của hàm số trên đoạn [a;b].....	28
Dạng 3. Xác định giá trị lớn nhất – giá trị nhỏ nhất của hàm số trên khoảng (a;b).....	32
Dạng 4. Ứng dụng GTLN-GTNN vào bài toán thực tế.....	34
Dạng 5. Định m để GTLN-GTNN của hàm số thỏa mãn điều kiện cho trước.....	41
Dạng 6. Bài toán GTLN-GTNN liên quan đến đồ thị đạo hàm.....	51
Dạng 7. Ứng dụng GTLN-GTNN vào bài toán đại số.....	62

PHẦN A. CÂU HỎI

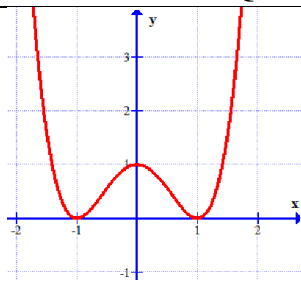
Dạng 1. Xác định giá trị lớn nhất – giá trị nhỏ nhất của hàm số thông qua đồ thị của nó

Câu 1. (ĐỀ THAM KHẢO BGD&ĐT NĂM 2018-2019) Cho hàm số $y = f(x)$ liên tục trên đoạn $[-1; 3]$ và có đồ thị như hình vẽ bên. Gọi M và m lần lượt là giá trị lớn nhất và nhỏ nhất của hàm số đã cho trên đoạn $[-1; 3]$. Giá trị của $M - m$ bằng



- A. 1**
B. 4
C. 5
D. 0

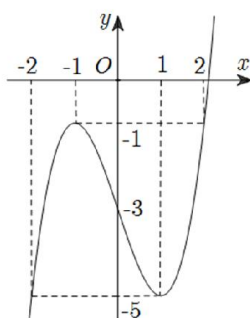
Câu 2. (ĐỀ 01 ĐỀ PHÁT TRIỂN ĐỀ THAM KHẢO BGD&ĐT NĂM 2018-2019) Cho hàm số $y = f(x)$ liên tục trên đoạn $[-1; 1]$ và có đồ thị như hình vẽ.



Gọi M và m lần lượt là giá trị lớn nhất và nhỏ nhất của hàm số đã cho trên đoạn $[-1;1]$. Giá trị của $M - m$ bằng

- A. 0. B. 1. C. 2. D. 3.

Câu 3. (CHUYÊN LƯƠNG THẾ VINH ĐỒNG NAI NĂM 2018-2019 LẦN 01) Cho hàm số $y = f(x)$ xác định và liên tục trên \mathbb{R} có đồ thị như hình vẽ bên. Tìm giá trị nhỏ nhất m và giá trị lớn nhất M của hàm số $y = f(x)$ trên đoạn $[-2;2]$.



- A. $m = -5; M = -1$. B. $m = -2; M = 2$. C. $m = -1; M = 0$. D. $m = -5; M = 0$.

Câu 4. (ĐỀ MINH HỌA GBD&ĐT NĂM 2017) Cho hàm số $y = f(x)$ xác định, liên tục trên \mathbb{R} và có bảng biến thiên:

x	$-\infty$	0	1	$+\infty$	
y'	$+$	\parallel	$-$	0	$+$
y	$-\infty$	0	-1	$+\infty$	

Khẳng định nào sau đây là khẳng định đúng?

- A. Hàm số có giá trị cực tiểu bằng 1.
 B. Hàm số có giá trị lớn nhất bằng 0 và giá trị nhỏ nhất bằng -1 .
 C. Hàm số đạt cực đại tại $x = 0$ và đạt cực tiểu tại $x = 1$.
 D. Hàm số có đúng một cực trị.

Câu 5. (THPT-THANG-LONG-HA-NOI-NAM-2018-2019 LẦN 01) Cho hàm số $y = f(x)$ liên tục trên $[-3;2]$ và có bảng biến thiên như sau. Gọi M, m lần lượt là giá trị lớn nhất và giá trị nhỏ nhất của hàm số $y = f(x)$ trên đoạn $[-1;2]$. Tính $M + m$.

x	-3	-1	0	1	2
$f(x)$	-2	3	0	2	1

A. 3.

B. 2.

C. 1.

D. 4.

Câu 6. (THPT BA ĐÌNH NĂM 2018-2019 LẦN 02) Xét hàm số $y = f(x)$ với $x \in [-1; 5]$ có bảng biến thiên như sau:

x	-1	0	2	5	
y'	+	0	-	0	+
y	3	4	0	$+\infty$	

Khẳng định nào sau đây là đúng

- A. Hàm số đã cho không tồn tại GTLN trên đoạn $[-1; 5]$
- B. Hàm số đã cho đạt GTNN tại $x = -1$ và $x = 2$ trên đoạn $[-1; 5]$
- C. Hàm số đã cho đạt GTNN tại $x = -1$ và đạt GTLN tại $x = 5$ trên đoạn $[-1; 5]$
- D. Hàm số đã cho đạt GTNN tại $x = 0$ trên đoạn $[-1; 5]$

Câu 7. (CHUYÊN LÊ THÁNH TÔNG NĂM 2018-2019 LẦN 01) Cho hàm số $y = f(x)$ liên tục trên \mathbb{R} , có bảng biến thiên như hình sau:

x	$-\infty$	-1	1	2	$+\infty$		
y'	-		+	0	+		-
y	$+\infty$	-3	2	-4			

Trong các mệnh đề sau, mệnh đề nào *sai*?

- A. Hàm số có hai điểm cực trị.
- B. Hàm số có giá trị lớn nhất bằng 2 và giá trị nhỏ nhất bằng -3.
- C. Đồ thị hàm số có đúng một đường tiệm cận.
- D. Hàm số nghịch biến trên mỗi khoảng $(-\infty; -1)$, $(2; +\infty)$.

Câu 8. (THPT CHUYÊN LAM SƠN THANH HÓA NĂM 2018-2019 LẦN 01) Cho hàm số $y = f(x)$ liên tục trên \mathbb{R} và có bảng biến thiên như hình vẽ. Mệnh đề nào sau đây đúng?

x	$-\infty$	-2	0	2	$+\infty$		
y'	+	0	-	0	+	0	-
y	$-\infty$	4	0	4	$-\infty$		

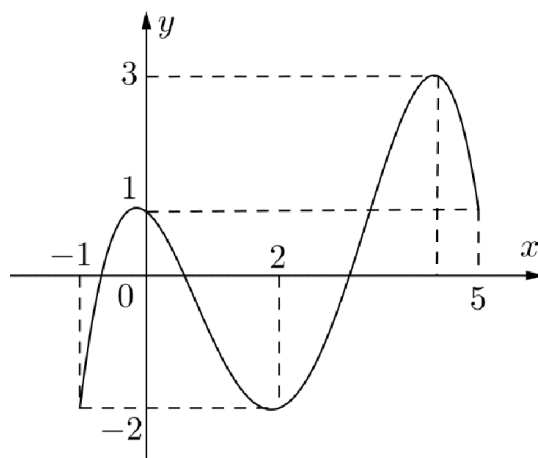
- A. Phương trình $f(x) = 0$ có 4 nghiệm phân biệt
- B. Hàm số đồng biến trên khoảng $(0; +\infty)$
- C. Giá trị nhỏ nhất của hàm số bằng 0
- D. Hàm số có 3 điểm cực trị

Câu 9. (CHUYÊN NGUYỄN TẤT THÀNH YÊN BÁI LẦN 01 NĂM 2018-2019) Cho hàm số $y = f(x)$ liên tục và có bảng biến thiên trên đoạn $[-1; 3]$ như hình vẽ bên. Khẳng định nào sau đây *đúng*?

x	-1	0	2	3		
y'		+	0	-	0	+
y	0	5	1	4		

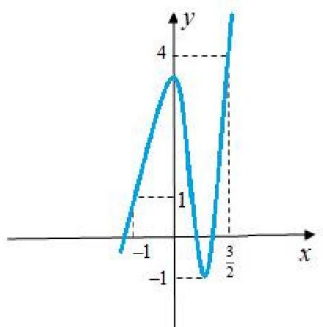
- A. $\max_{[-1;3]} f(x) = f(0)$. B. $\max_{[-1;3]} f(x) = f(3)$. C. $\max_{[-1;3]} f(x) = f(2)$. D. $\max_{[-1;3]} f(x) = f(-1)$.

Câu 10. (ĐỀ THI THỬ VTED 02 NĂM HỌC 2018 - 2019) Cho hàm số $f(x)$ liên tục trên $[-1;5]$ và có đồ thị trên đoạn $[-1;5]$ như hình vẽ bên dưới. Tổng giá trị lớn nhất và giá trị nhỏ nhất của hàm số $f(x)$ trên đoạn $[-1;5]$ bằng



- A. -1 B. 4 C. 1 D. 2

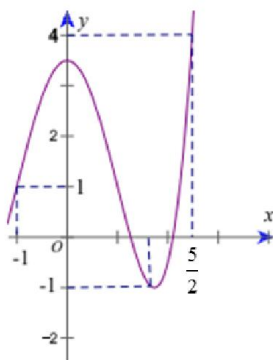
Câu 11. (SỞ GD&ĐT THANH HÓA NĂM 2018 - 2019) Cho hàm số $f(x)$ liên tục trên \mathbb{R} và có đồ thị như hình vẽ sau:



Gọi M và m lần lượt là giá trị lớn nhất và nhỏ nhất của hàm số $f(x)$ trên $\left[-1; \frac{3}{2}\right]$. Giá trị của $M + m$ bằng

- A. $\frac{1}{2}$. B. 5. C. 4. D. 3.

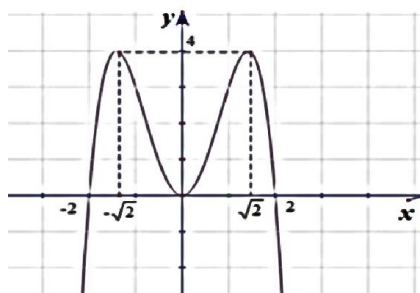
Câu 12. (THPT YÊN MỸ HƯNG YÊN NĂM 2018-2019 LẦN 01) Cho hàm số $y = f(x)$ xác định, liên tục trên $\left[-1; \frac{5}{2}\right]$ và có đồ thị là đường cong như hình vẽ.



Giá trị lớn nhất M và giá trị nhỏ nhất m của hàm số $f(x)$ trên $\left[-1, \frac{5}{2}\right]$ là:

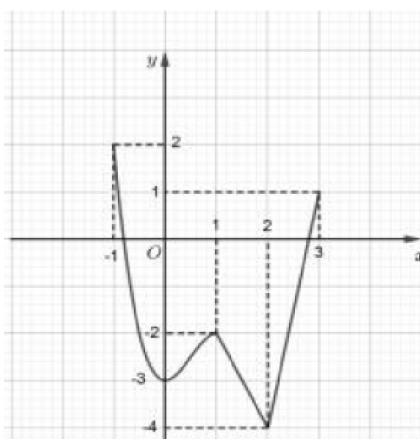
- A. $M = 4, m = 1$ B. $M = 4, m = -1$ C. $M = \frac{7}{2}, m = -1$ D. $M = \frac{7}{2}, m = 1$

Câu 13. (GKI THPT NGHĨA HƯNG NAM ĐỊNH NĂM 2018-2019) Cho hàm số $y = f(x)$ có đồ thị như hình vẽ. Giá trị lớn nhất của hàm số $f(x)$ trên đoạn $[0; 2]$ là:



- A. $\text{Max}_{[0;2]} f(x) = 2$. B. $\text{Max}_{[0;2]} f(x) = \sqrt{2}$. C. $\text{Max}_{[0;2]} f(x) = 4$. D. $\text{Max}_{[0;2]} f(x) = 0$.

Câu 14. (SỞ GD&ĐT BẮC GIANG NĂM 2018-2019 LẦN 01) Cho hàm số $y = f(x)$ liên tục trên đoạn $[-1; 3]$ và có đồ thị như hình vẽ bên. Gọi M, m lần lượt là giá trị lớn nhất và giá trị nhỏ nhất của hàm số đã cho trên đoạn $[-1; 3]$. Giá trị của $M + m$ là



- A. 2 B. -6 C. -5 D. -2

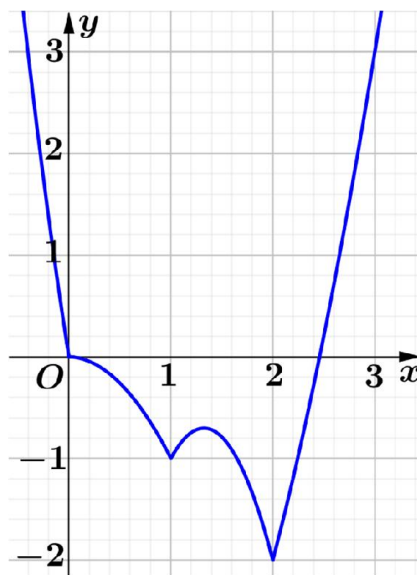
Câu 15. (SỞ GD&ĐT HÀ NỘI NĂM 2018-2019) Cho hàm số $y = f(x)$ có bảng biến thiên trên $[-5; 7]$ như sau

x	-5	1	7	
y'		-	0	+
y	6		2	9

Mệnh đề nào dưới đây **đúng**?

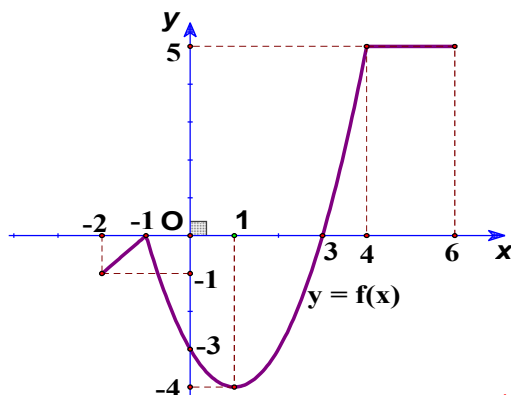
- A. $\text{Min}_{[-5;7]} f(x) = 6$. B. $\text{Min}_{[-5;7]} f(x) = 2$. C. $\text{Max}_{[-5;7]} f(x) = 9$. D. $\text{Max}_{[-5;7]} f(x) = 6$.

Câu 16. (TT THANH TƯỜNG NGHỆ AN NĂM 2018-2019 LẦN 02) Cho hàm số $f(x)$ liên tục trên đoạn $[0; 3]$ và có đồ thị như hình vẽ bên. Gọi M và m lần lượt là giá trị lớn nhất và nhỏ nhất của hàm số đã cho trên $[0; 3]$. Giá trị của $M + m$ bằng?



- A. 5. B. 3. C. 2. D. 1.

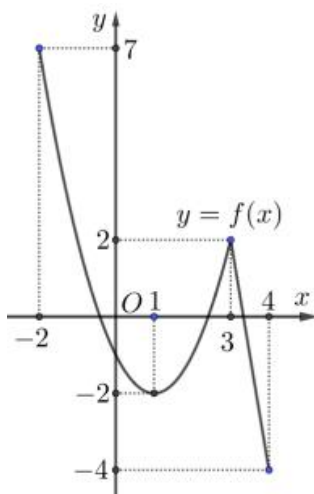
Câu 17. (CHUYÊN LÊ QUÝ ĐÔN ĐIỆN BIÊN LẦN 3 NĂM 2018-2019) Cho hàm số $y = f(x)$ liên tục trên đoạn $[-2; 6]$ và có đồ thị như hình vẽ bên dưới.



Gọi M và m lần lượt là giá trị lớn nhất và nhỏ nhất của hàm số đã cho trên đoạn $[-2; 6]$. Giá trị của $M - m$ bằng

- A. 9. B. -8. C. -9. D. 8.

Câu 18. (ĐỀ THI THỬ VTED 03 NĂM HỌC 2018 - 2019) Cho hàm số $y = f(x)$ liên tục và có đồ thị trên đoạn $[-2; 4]$ như hình vẽ bên. Tổng giá trị lớn nhất và nhỏ nhất của hàm số $y = f(x)$ trên đoạn $[-2; 4]$ bằng



- A. 5 B. 3 C. 0 D. -2

Câu 19. (THPT NGÔ SĨ LIÊN BẮC GIANG NĂM 2018-2019 LẦN 01) Cho hàm số $y = f(x)$ có bảng xét dấu đạo hàm như sau:

x	$-\infty$	-1	0	1	$+\infty$		
y'		-	-	0	+	0	-

Mệnh đề nào sau đây đúng

- A. $\max_{(-1;1]} f(x) = f(0)$ B. $\max_{(0;+\infty)} f(x) = f(1)$ C. $\min_{(-\infty;-1)} f(x) = f(-1)$ D. $\min_{(-1;+\infty)} f(x) = f(0)$

Dạng 2. Xác định giá trị lớn nhất – giá trị nhỏ nhất của hàm số trên đoạn $[a;b]$

Câu 20. (Mã 102 - BGD - 2019) Giá trị nhỏ nhất của hàm số $f(x) = x^3 - 3x + 2$ trên đoạn $[-3; 3]$ bằng

A. 0. B. -16. C. 20. D. 4.

Câu 21. (MÃ ĐỀ 110 BGD&ĐT NĂM 2017) Tìm giá trị lớn nhất M của hàm số $y = x^4 - 2x^2 + 3$ trên đoạn $[0; \sqrt{3}]$.

- A. $M = 6$ B. $M = 1$ C. $M = 9$ D. $M = 8\sqrt{3}$

Câu 22. (Mã 103 - BGD - 2019) Giá trị lớn nhất của hàm số $f(x) = x^3 - 3x$ trên đoạn $[-3; 3]$ bằng

A. -2. B. 18. C. 2. D. -18.

Câu 23. (ĐỀ MINH HỌA GBD&ĐT NĂM 2017) Tìm giá trị nhỏ nhất của hàm số $y = \frac{x^2 + 3}{x - 1}$ trên đoạn $[2; 4]$.

- A. $\min_{[2;4]} y = -3$ B. $\min_{[2;4]} y = \frac{19}{3}$ C. $\min_{[2;4]} y = 6$ D. $\min_{[2;4]} y = -2$

Câu 24. (Mã đề 104 BGD&ĐT NĂM 2018) Giá trị lớn nhất của hàm số $y = x^4 - x^2 + 13$ trên đoạn $[-1; 2]$ bằng

- A. 85 B. $\frac{51}{4}$ C. 13 D. 25

Câu 25. (MĐ 104 BGD&ĐT NĂM 2017) Tìm giá trị nhỏ nhất m của hàm số $y = x^2 + \frac{2}{x}$ trên đoạn $\left[\frac{1}{2}; 2\right]$.

- A. $m = 5$ B. $m = 3$ C. $m = \frac{17}{4}$ D. $m = 10$

Câu 26. (MÃ ĐỀ 123 BGD&ĐT NĂM 2017) Tìm giá trị nhỏ nhất m của hàm số $y = x^3 - 7x^2 + 11x - 2$ trên đoạn $[0; 2]$.

- A. $m = 3$ B. $m = 0$ C. $m = -2$ D. $m = 11$

Câu 27. (Mã đề 101 BGD&ĐT NĂM 2018) Giá trị lớn nhất của hàm số $y = x^4 - 4x^2 + 9$ trên đoạn $[-2; 3]$ bằng

- A. 201 B. 2 C. 9 D. 54

Câu 28. (ĐỀ THAM KHẢO BGD & ĐT 2018) Giá trị lớn nhất của hàm số $f(x) = x^4 - 4x^2 + 5$ trên đoạn $[-2; 3]$ bằng

- A. 122 B. 50 C. 5 D. 1

Câu 29. (MĐ 105 BGD&ĐT NĂM 2017) Tìm giá trị nhỏ nhất m của hàm số $y = x^4 - x^2 + 13$ trên đoạn $[-2; 3]$.

- A. $m = 13$ B. $m = \frac{51}{4}$ C. $m = \frac{51}{2}$ D. $m = \frac{49}{4}$

Câu 30. (Mã đề 104 - BGD - 2019) Giá trị nhỏ nhất của hàm số $f(x) = x^3 - 3x$ trên đoạn $[-3; 3]$ bằng

- A. -18. B. -2. C. 2. D. 18.

Câu 31. (MĐ 103 BGD&ĐT NĂM 2017-2018) Giá trị nhỏ nhất của hàm số $y = x^3 + 3x^2$ trên đoạn $[-4; -1]$ bằng

- A. -16 B. 0 C. 4 D. -4

Câu 32. (Mã đề 102 BGD&ĐT NĂM 2018) Giá trị nhỏ nhất của hàm số $y = x^3 + 2x^2 - 7x$ trên đoạn $[0; 4]$ bằng

- A. -259 B. 68 C. 0 D. -4

Câu 33. (Mã đề 101 - BGD - 2019) Giá trị lớn nhất của hàm số $f(x) = x^3 - 3x + 2$ trên đoạn $[-3; 3]$ là

- A. 4. B. -16. C. 20. D. 0.

Dạng 3. Xác định giá trị lớn nhất – giá trị nhỏ nhất của hàm số trên khoảng (a;b)

Câu 34. (ĐỀ THAM KHẢO BGD&ĐT NĂM 2017) Tính giá trị nhỏ nhất của hàm số $y = 3x + \frac{4}{x^2}$ trên khoảng $(0; +\infty)$.

- A. $\min_{(0;+\infty)} y = \frac{33}{5}$ B. $\min_{(0;+\infty)} y = 2\sqrt[3]{9}$ C. $\min_{(0;+\infty)} y = 3\sqrt[3]{9}$ D. $\min_{(0;+\infty)} y = 7$

Câu 35. (CHUYÊN LƯƠNG THẾ VINH ĐỒNG NAI NĂM 2018-2019 LẦN 01) Gọi m là giá trị nhỏ nhất của hàm số $y = x + \frac{4}{x}$ trên khoảng $(0; +\infty)$. Tìm m

- A. $m = 4$. B. $m = 2$. C. $m = 1$. D. $m = 3$.

Câu 36. (THPT - YÊN ĐỊNH THANH HÓA 2018 2019- LẦN 2) Gọi a là giá trị nhỏ nhất của hàm số $y = x^2 + \frac{4}{x}$ trên khoảng $(0; +\infty)$. Tìm a .

- A. $3\sqrt[3]{4}$. B. 5. C. 6. D. $2\sqrt[3]{16}$.

Câu 37. (THPT MINH CHÂU HƯNG YÊN NĂM 2018 – 2019) Giá trị nhỏ nhất của hàm số $y = x - 5 + \frac{1}{x}$ trên khoảng $(0; +\infty)$ bằng bao nhiêu?

- A. 0 B. -1 C. -3 D. -2

Câu 38. (THPT CHUYÊN BẮC GIANG NAM 2018-2019 LẦN 01) Giá trị nhỏ nhất của hàm số $f(x) = x + \frac{1}{x}$ trên nửa khoảng $[2; +\infty)$ là:

- A. 2 B. $\frac{5}{2}$ C. 0 D. $\frac{7}{2}$

Dạng 4. Ứng dụng GTLN-GTNN vào bài toán thực tế

Câu 39. (Mã đề 101 BGD&ĐT NĂM 2018) Ông A dự định dùng hết $6,5m^2$ kính để làm một bể cá có dạng hình hộp chữ nhật không nắp, chiều dài gấp đôi chiều rộng (các mối ghép có không đáng kể). Bể cá có dung tích lớn nhất bằng bao nhiêu (kết quả làm tròn đến hàng phần trăm).

- A. $2,26 m^3$ B. $1,61 m^3$ C. $1,33 m^3$ D. $1,50 m^3$

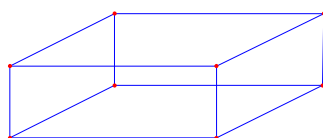
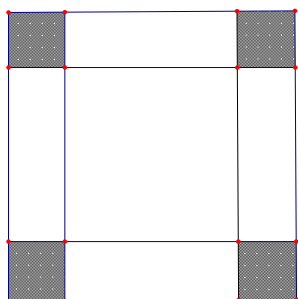
Câu 40. (MĐ 104 BGD&ĐT NĂM 2017) Một vật chuyển động theo quy luật $s = -\frac{1}{3}t^3 + 6t^2$ với t (giây) là khoảng thời gian tính từ khi vật bắt đầu chuyển động và s (mét) là quãng đường vật di chuyển được trong khoảng thời gian đó. Hỏi trong khoảng thời gian 9 giây kể từ khi bắt đầu chuyển động, vận tốc lớn nhất của vật đạt được bằng bao nhiêu?

- A. 243 (m/s) B. 27 (m/s) C. 144 (m/s) D. 36 (m/s)

Câu 41. (MĐ 103 BGD&ĐT NĂM 2017-2018) Ông A dự định sử dụng hết $5 m^2$ kính để làm một bể cá bằng kính có dạng hình hộp chữ nhật không nắp, chiều dài gấp đôi chiều rộng (các mối ghép có kích thước không đáng kể). Bể cá có dung tích lớn nhất bằng bao nhiêu (kết quả làm tròn đến hàng phần trăm)?

- A. $1,01 m^3$ B. $0,96 m^3$ C. $1,33 m^3$ D. $1,51 m^3$

Câu 42. (ĐỀ MINH HỌA GBD&ĐT NĂM 2017) Cho một tấm nhôm hình vuông cạnh 12 cm. Người ta cắt ở bốn góc của tấm nhôm đó bốn hình vuông bằng nhau, mỗi hình vuông có cạnh bằng x (cm), rồi gấp tấm nhôm lại như hình vẽ dưới đây để được một cái hộp không nắp. Tìm x để hộp nhận được có thể tích lớn nhất.



- A. $x = 3$ B. $x = 2$ C. $x = 4$ D. $x = 6$

Câu 43. (KTNL GIA BÌNH NĂM 2018-2019) Một chất điểm chuyển động theo phương trình $S = -t^3 + 3t^2 - 2$, trong đó t tính bằng giây và S tính theo mét. Chuyển động có vận tốc lớn nhất là

- A. 1 m/s. B. 4 m/s. C. 3 m/s. D. 2 m/s.

Câu 44. (THPT NĂM 2018-2019 LẦN 04) Một loại thuốc được dùng cho một bệnh nhân và nồng độ thuốc trong máu của bệnh nhân được giám sát bởi bác sĩ. Biết rằng nồng độ thuốc trong máu của bệnh nhân sau khi tiêm vào cơ thể trong t giờ được cho bởi công thức $c(t) = \frac{t}{t^2 + 1}$ (mg/L). Sau khi tiêm thuốc bao lâu thì nồng độ thuốc trong máu của bệnh nhân cao nhất?

- A. 4 giờ. B. 1 giờ. C. 3 giờ. D. 2 giờ.

Câu 45. (THPT YÊN MỸ HƯNG YÊN NĂM 2018-2019 LẦN 01) Đợt xuất khẩu gạo của tỉnh A thường kéo dài trong 2 tháng (60 ngày). Người ta nhận thấy số lượng xuất khẩu gạo tính theo ngày thứ t được xác định bởi công thức $S(t) = \frac{2}{5}t^3 - 63t^2 + 3240t - 3100$ với ($1 \leq t \leq 60$). Hỏi trong 60 ngày đó thì ngày thứ mấy có số lượng xuất khẩu gạo cao nhất.

- A. 60 B. 45 C. 30 D. 25

Câu 46. (GKI NHÂN CHÍNH HÀ NỘI NĂM 2018-2019 LẦN 01) Một vật chuyển động theo quy luật $S = 10t^2 - \frac{1}{3}t^3$, với t (giây) là khoảng thời gian tính từ lúc vật bắt đầu chuyển động và $S(m)$ là quãng đường vật đi được trong khoảng thời gian đó. Hỏi trong khoảng thời gian 15 giây từ lúc vật bắt đầu chuyển động vận tốc $v(m/s)$ của vật đạt giá trị lớn nhất tại thời điểm $t(s)$ bằng:

- A. $8(s)$. B. $20(s)$ C. $10(s)$. D. $15(s)$.

Câu 47. (CHUYÊN LÊ QUÝ ĐÔN ĐIỆN BIÊN NĂM 2018-2019 LẦN 02) Một sợi dây có chiều dài $28m$ được cắt thành hai đoạn để làm thành một hình vuông và một hình tròn. Tính chiều dài (theo đơn vị mét) của đoạn dây làm thành hình vuông được cắt ra sao cho tổng diện tích của hình vuông và hình tròn là nhỏ nhất?

- A. $\frac{56}{4 + \pi}$. B. $\frac{112}{4 + \pi}$. C. $\frac{84}{4 + \pi}$. D. $\frac{92}{4 + \pi}$.

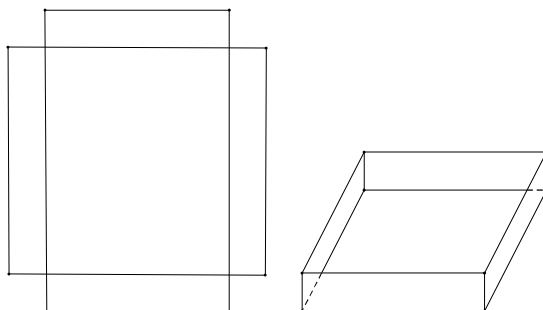
Câu 48. (PEN I - THẦY LÊ ANH TUẤN - ĐỀ 3 - NĂM 2019) Một xưởng in có 15 máy in được cài đặt tự động và giám sát bởi một kỹ sư, mỗi máy in có thể in được 30 ấn phẩm trong 1 giờ, chi phí cài đặt và bảo dưỡng cho mỗi máy in cho 1 đợt hàng là 48.000 đồng, chi phí trả cho kỹ sư giám sát là 24.000 đồng/giờ. Đợt hàng này xưởng in nhận 6000 ấn phẩm thì số máy in cần sử dụng để chi phí in ít nhất là

- A. 10 máy. B. 11 máy. C. 12 máy. D. 9 máy.

Câu 49. Một chất điểm chuyển động thẳng với quãng đường biến thiên theo thời gian bởi quy luật $s(t) = t^3 - 4t^2 + 12$ (m), trong đó t (s) là khoảng thời gian tính từ lúc bắt đầu chuyển động. Vận tốc của chất điểm đó đạt giá trị bé nhất khi t bằng bao nhiêu?

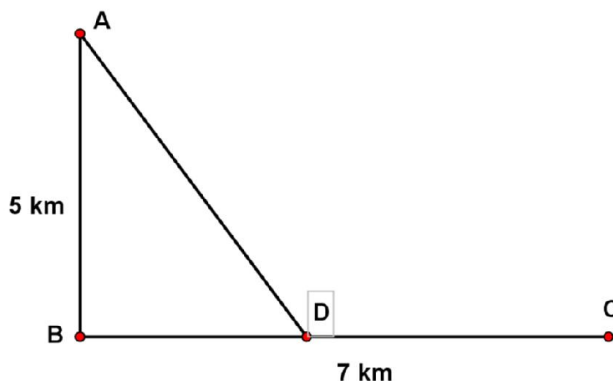
- A. 2 (s). B. $\frac{8}{3}$ (s). C. 0 (s). D. $\frac{4}{3}$ (s).

Câu 50. (THPT MINH CHÂU HƯNG YÊN NĂM 2018 – 2019) Cho một tấm nhôm hình chữ nhật có chiều dài bằng $10cm$ và chiều rộng bằng $8cm$. Người ta cắt bỏ ở bốn góc của tấm nhôm đó bốn hình vuông bằng nhau, mỗi hình vuông có cạnh bằng $x(cm)$, rồi gập tấm nhôm lại (như hình vẽ) để được một cái hộp không nắp. Tìm x để hộp nhận được có thể tích lớn nhất.



A. $x = \frac{8-2\sqrt{21}}{3}$ B. $x = \frac{10-2\sqrt{7}}{3}$ C. $x = \frac{9+\sqrt{21}}{9}$ D. $x = \frac{9-\sqrt{21}}{3}$

Câu 51. (GKI THPT VIỆT ĐỨC HÀ NỘI NĂM 2018-2019) Một đoàn cứu trợ lũ lụt đang ở vị trí A của một tỉnh miền trung muốn đến xã C để tiếp tế lương thực và thuốc men. Để đi đến C , đoàn cứu trợ phải chèo thuyền từ A đến vị trí D với vận tốc $4(km/h)$, rồi đi bộ đến vị trí C với vận tốc $6(km/h)$. Biết A cách B một khoảng $5km$, B cách C một khoảng $7km$ (hình vẽ). Hỏi vị trí điểm D cách A bao xa để đoàn cứu trợ đi đến xã C nhanh nhất?



A. $AD = 5\sqrt{3} km$. B. $AD = 2\sqrt{5} km$. C. $AD = 5\sqrt{2} km$. D. $AD = 3\sqrt{5} km$.

Dạng 5. Định m để GTLN-GTNN của hàm số thỏa mãn điều kiện cho trước

Câu 52. (MÃ ĐỀ 123 BGD&ĐT NĂM 2017) Cho hàm số $y = \frac{x+m}{x-1}$ (m là tham số thực) thỏa mãn $\min_{[2;4]} y = 3$. Mệnh đề nào dưới đây **đúng**?

A. $m > 4$ B. $3 < m \leq 4$ C. $m < -1$ D. $1 \leq m < 3$

Câu 53. (ĐỀ THAM KHẢO BGD & ĐT 2018) Gọi S là tập hợp tất cả các giá trị của tham số thực m sao cho giá trị lớn nhất của hàm số $y = |x^3 - 3x + m|$ trên đoạn $[0; 2]$ bằng 3. Số phần tử của S là

A. 0 B. 6 C. 1 D. 2

Câu 54. (MÃ ĐỀ 110 BGD&ĐT NĂM 2017) Cho hàm số $y = \frac{x+m}{x+1}$ (m là tham số thực) thỏa mãn

$\min_{[1;2]} y + \max_{[1;2]} y = \frac{16}{3}$. Mệnh đề nào dưới đây đúng?

A. $m > 4$ B. $2 < m \leq 4$ C. $m \leq 0$ D. $0 < m \leq 2$

Câu 55. (CỤM LIÊN TRƯỜNG HẢI PHÒNG NĂM 2018-2019) Có một giá trị m_0 của tham số m để hàm số $y = x^3 + (m^2 + 1)x + m + 1$ đạt giá trị nhỏ nhất bằng 5 trên đoạn $[0; 1]$. Mệnh đề nào sau đây là đúng?

A. $2018m_0 - m_0^2 \geq 0$. B. $2m_0 - 1 < 0$.
C. $6m_0 - m_0^2 < 0$. D. $2m_0 + 1 < 0$.

Câu 56. (SỞ GIÁO DỤC ĐÀO TẠO VĨNH PHÚC NĂM 2018 - 2019 LẦN 01) Tính tổng tất cả các giá trị của tham số m sao cho giá trị lớn nhất của hàm số $y = |x^2 - 2x + m|$ trên đoạn $[-1; 2]$ bằng 5.

A. -1. B. 2. C. -2. D. 1.

Câu 57. (THCS - THPT NGUYỄN KHUYẾN NĂM 2018-2019 LẦN 01) Nếu hàm số $y = x + m + \sqrt{1-x^2}$ có giá trị lớn nhất bằng $2\sqrt{2}$ thì giá trị của m là

A. $\frac{\sqrt{2}}{2}$. B. $-\sqrt{2}$. C. $\sqrt{2}$. D. $-\frac{\sqrt{2}}{2}$.

Câu 58. (THPT LÊ VĂN THỊNH BẮC NINH NĂM 2018-2019) Cho hàm số $y = \frac{x+m}{x+1}$ (m là tham số thực) thỏa mãn $\min_{[0;1]} y = 3$. Mệnh đề nào dưới đây đúng?

A. $1 \leq m < 3$ B. $m > 6$ C. $m < 1$ D. $3 < m \leq 6$

Câu 59. (CHUYÊN KHTN LẦN 2 NĂM 2018-2019) Tổng giá trị lớn nhất và giá trị nhỏ nhất của hàm số $y = \frac{x+m}{x+1}$ trên $[1;2]$ bằng 8 (m là tham số thực). Khẳng định nào sau đây đúng?

A. $m > 10$. B. $8 < m < 10$. C. $0 < m < 4$. D. $4 < m < 8$.

Câu 60. (THPT NGÔ GIA TỰ VĨNH PHÚC NĂM 2018-2019 LẦN 01) Cho hàm số $y = 2x^3 - 3x^2 - m$. Trên $[-1;1]$ hàm số có giá trị nhỏ nhất là -1 . Tính m ?

A. $m = -6$. B. $m = -3$. C. $m = -4$. D. $m = -5$.

Câu 61. (THPT ĐÔNG SƠN THANH HÓA NĂM 2018-2019 LẦN 02) Tìm m để giá trị lớn nhất của hàm số $y = |x^3 - 3x + 2m - 1|$ trên đoạn $[0;2]$ là nhỏ nhất. Giá trị của m thuộc khoảng nào?

A. $\left(-\frac{3}{2}; -1\right)$. B. $\left(\frac{2}{3}; 2\right)$. C. $[-1;0]$. D. $(0;1)$.

Câu 62. (HỌC MÃI NĂM 2018-2019-LẦN 02) Biết S là tập giá trị của m để tổng giá trị lớn nhất và giá trị nhỏ nhất của hàm số $y = x^4 - m^2x^3 - 2x^2 - m$ trên đoạn $[0;1]$ bằng -16 . Tính tích các phần tử của S .

A. 2. B. -2. C. -15. D. -17.

Câu 63. (CHUYÊN BẮC NINH NĂM 2018-2019 LẦN 03) Gọi A, B lần lượt là giá trị nhỏ nhất, giá trị lớn nhất của hàm số $y = \frac{x+m^2+m}{x-1}$ trên đoạn $[2;3]$. Tìm tất cả các giá trị thực của tham số m để $A+B = \frac{13}{2}$.

A. $m = 1; m = -2$. B. $m = -2$. C. $m = \pm 2$. D. $m = -1; m = 2$.

Câu 64. (THPT AN LÃO HẢI PHÒNG NĂM 2018-2019 LẦN 02) Tìm tất cả giá trị thực của tham số m để hàm số $y = \frac{x^2+mx+1}{x+m}$ liên tục và đạt giá trị nhỏ nhất trên đoạn $[0;2]$ tại một điểm $x_0 \in (0;2)$.

A. $0 < m < 1$ B. $m > 1$ C. $m > 2$ D. $-1 < m < 1$

Câu 65. (THPT CHUYÊN VĨNH PHÚC LẦN 02 NĂM 2018-2019) Gọi S là tập hợp tất cả các giá trị thực của tham số m sao cho giá trị lớn nhất của hàm số $y = \left| \frac{x^2+mx+m}{x+1} \right|$ trên $[1;2]$ bằng 2. Số phần tử của tập S

A. 3. B. 1. C. 4. D. 2.

Câu 66. (THPT MINH CHÂU HƯNG YÊN NĂM 2018 – 2019) Tìm m để giá trị nhỏ nhất của hàm số $f(x) = \frac{x-m^2+m}{x+1}$ trên đoạn $(0;1)$ bằng -2

A. $\begin{cases} m = 1 \\ m = 2 \end{cases}$ B. $\begin{cases} m = 1 \\ m = -2 \end{cases}$ C. $\begin{cases} m = -1 \\ m = 2 \end{cases}$ D. $m = \frac{1 \pm \sqrt{21}}{2}$.

Câu 67. (THPT BẠCH ĐẰNG QUẢNG NINH NĂM 2018-2019) Cho hàm số $y = \frac{1 - m \sin x}{\cos x + 2}$. Có bao nhiêu giá trị nguyên của tham số m thuộc đoạn $[0;10]$ để giá trị nhỏ nhất của hàm số nhỏ hơn -2 ?

- A. 1. B. 9. C. 3. D. 6.

Câu 68. (ĐỀ HỌC SINH GIỎI TỈNH BẮC NINH NĂM 2018-2019) Xét hàm số $f(x) = |x^2 + ax + b|$, với a, b là tham số. Gọi M là giá trị lớn nhất của hàm số trên $[-1;3]$. Khi M nhận giá trị nhỏ nhất có thể được, tính $a + 2b$.

- A. 2. B. 4. C. -4. D. 3.

Câu 69. (ĐỀ HỌC SINH GIỎI TỈNH BẮC NINH NĂM 2018-2019) Cho hàm số $y = ax^3 + cx + d, a \neq 0$ có $\min_{x \in (-\infty; 0)} f(x) = f(-2)$. Giá trị lớn nhất của hàm số $y = f(x)$ trên đoạn $[1;3]$ bằng

- A. $d - 11a$. B. $d - 16a$. C. $d + 2a$. D. $d + 8a$.

Câu 70. (CHUYÊN THÁI BÌNH NĂM 2018-2019 LẦN 03) Gọi S là tập hợp các giá trị của tham số m để giá trị lớn nhất của hàm số $y = \left| \frac{x^2 - mx + 2m}{x - 2} \right|$ trên đoạn $[-1;1]$ bằng 3. Tính tổng tất cả các phần tử của S .

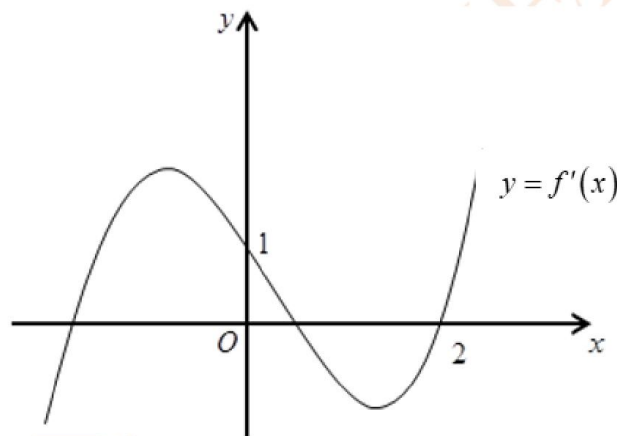
- A. $-\frac{8}{3}$. B. 5. C. $\frac{5}{3}$. D. -1.

Câu 71. (GKI THPT NGHĨA HƯNG NAM ĐỊNH NĂM 2018-2019) Tìm tất cả các giá trị của tham số m để hàm số $y = \frac{x + m}{x^2 + x + 1}$ có giá trị lớn nhất trên \mathbb{R} nhỏ hơn hoặc bằng 1.

- A. $m \leq 1$. B. $m \geq 1$. C. $m \geq -1$. D. $m \leq -1$.

Dạng 6. Bài toán GTLN-GTNN liên quan đến đồ thị đạo hàm

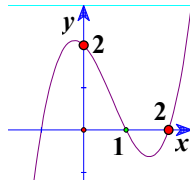
Câu 72. (Mã 102 - BGD - 2019) Cho hàm số $f(x)$, hàm số $y = f'(x)$ liên tục trên \mathbb{R} và có đồ thị như hình vẽ.



Bất phương trình $f(x) > x + m$ (m là tham số thực) nghiệm đúng với mọi $x \in (0;2)$ khi và chỉ khi

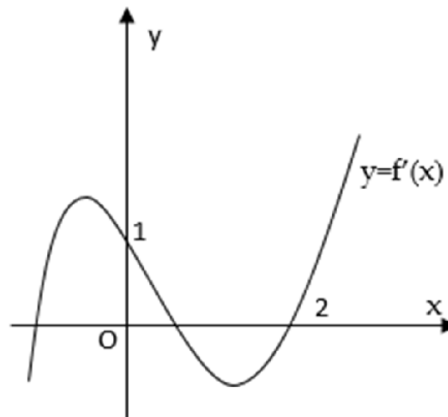
- A. $m \leq f(0)$. B. $m < f(0)$. C. $m \leq f(2) - 2$. D. $m < f(2) - 2$.

Câu 73. (Mã 103 - BGD - 2019) Cho hàm số $y = f(x)$, hàm số $y = f'(x)$ liên tục trên \mathbb{R} và có đồ thị như hình vẽ bên. Bất phương trình $f(x) < 2x + m$ (m là tham số thực) nghiệm đúng với mọi $x \in (0; 2)$ khi và chỉ khi



- A. $m \geq f(0)$. B. $m \geq f(2) - 4$. C. $m > f(0)$. D. $m > f(2) - 4$.

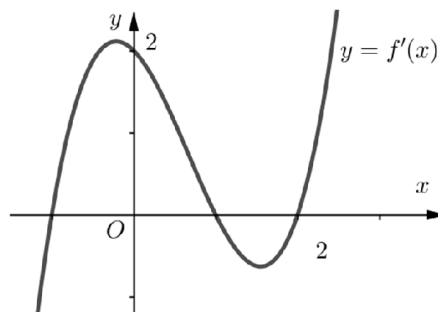
Câu 74. (Mã đề 101 - BGD - 2019) Cho hàm số $y = f(x)$, hàm số $y = f'(x)$ liên tục trên \mathbb{R} và có đồ thị như hình vẽ bên dưới



Bất phương trình $f(x) < x + m$ (m là tham số thực) nghiệm đúng với mọi $x \in (0; 2)$ khi và chỉ khi

- A. $m > f(2) - 2$. B. $m > f(0)$. C. $m \geq f(2) - 2$. D. $m \geq f(0)$.

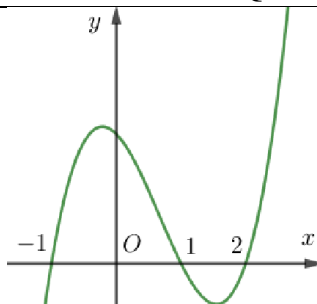
Câu 75. (Mã đề 104 - BGD - 2019) Cho hàm số $f(x)$, hàm số $f'(x)$ liên tục trên \mathbb{R} và có đồ thị như hình vẽ.



Bất phương trình $f(x) > 2x + m$ (m là tham số thực) nghiệm đúng với mọi $x \in (0; 2)$ khi và chỉ khi

- A. $m < f(2) - 4$. B. $m \leq f(2) - 4$. C. $m \leq f(0)$. D. $m < f(0)$.

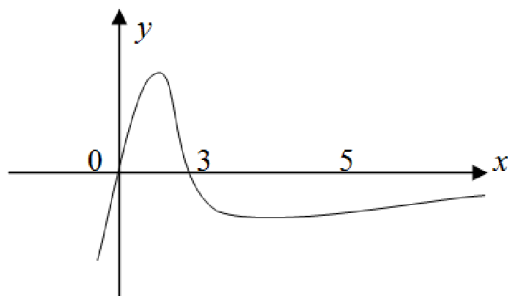
Câu 76. (THCS - THPT NGUYỄN KHUYẾN NĂM 2018-2019 LẦN 01) Cho hàm số $y = f(x)$ xác định và liên tục trên \mathbb{R} , đồ thị của hàm số $y = f'(x)$ như hình vẽ.



Giá trị lớn nhất của hàm số $y = f(x)$ trên đoạn $[-1; 2]$ là

- A. $f(1)$. B. $f(-1)$. C. $f(2)$. D. $f(0)$.

Câu 77. (THPT THIỆU HÓA – THANH HÓA NĂM 2018-2019 LẦN 01) Cho hàm số $f(x)$ có đạo hàm là $f'(x)$. Đồ thị của hàm số $y = f'(x)$ được cho như hình vẽ bên. Biết rằng $f(0) + f(1) - 2f(3) = f(5) - f(4)$. Tìm giá trị nhỏ nhất m và giá trị lớn nhất M của $f(x)$ trên đoạn $[0; 5]$



- A. $m = f(5), M = f(3)$ B. $m = f(5), M = f(1)$
 C. $m = f(0), M = f(3)$ D. $m = f(1), M = f(3)$

Câu 78. (ĐỀ 04 VTED NĂM 2018-2019) Cho hàm số $y = f(x)$. Hàm số $y = f'(x)$ có bảng biến thiên như sau:

Bất phương trình $f(e^x) < e^x + m$ nghiệm đúng với mọi $x \in (-1; 1)$ khi và chỉ khi

x	$-\infty$	-2	3	$+\infty$
$f'(x)$	$+\infty$	-3	1	$-\infty$

- A. $m \geq f\left(\frac{1}{e}\right) - \frac{1}{e}$ B. $m > f(-1) - \frac{1}{e}$ C. $m \geq f(-1) - \frac{1}{e}$ D. $m > f\left(\frac{1}{e}\right) - \frac{1}{e}$

Câu 79. (CHUYÊN LÊ HỒNG PHONG NAM ĐỊNH LẦN 1 NĂM 2018-2019) Cho hàm số $y = f(x)$ có bảng biến thiên như hình dưới đây. Tìm giá trị lớn nhất của hàm số $g(x) = f(4x - x^2) + \frac{1}{3}x^3 - 3x^2 + 8x + \frac{1}{3}$ trên đoạn $[1; 3]$.

x	$-\infty$	0	4	$+\infty$
$f'(x)$		$-$	0	$+$
$f(x)$	$+\infty$	-3	5	$-\infty$

- A. 15. B. $\frac{25}{3}$. C. $\frac{19}{3}$. D. 12.

Câu 80. (THPT NGHĨA HƯNG ND- GK2 - 2018 - 2019) Cho hàm số $y = f(x)$. Hàm số $y = f'(x)$ có bảng biến thiên như sau

x	$-\infty$	0	$\frac{\pi}{2}$	$+\infty$
$f'(x)$		$+$	1	6
	$+\infty$		$-\infty$	

Bất phương trình $f(x) > 2^{\cos x} + 3m$ đúng với mọi $x \in \left(0; \frac{\pi}{2}\right)$ khi và chỉ khi

- A. $m \leq \frac{1}{3}[f(0) - 2]$. B. $m < \frac{1}{3}[f(0) - 2]$. C. $m \leq \frac{1}{3}\left[f\left(\frac{\pi}{2}\right) - 1\right]$. D. $m < \frac{1}{3}\left[f\left(\frac{\pi}{2}\right) - 1\right]$.

Câu 81. (Đề minh họa 2019) Cho hàm số $y = f(x)$. Hàm số $y = f'(x)$ có bảng biến thiên như sau:

Bất phương trình $f(e^x) < e^x + m$ nghiệm đúng với mọi $x \in (-1; 1)$ khi và chỉ khi

x	$-\infty$	-2	3	$+\infty$
$f'(x)$		$+$	1	$-\infty$
	$+\infty$		-3	

- A. $m \geq f\left(\frac{1}{e}\right) - \frac{1}{e}$ B. $m > f(-1) - \frac{1}{e}$ C. $m \geq f(-1) - \frac{1}{e}$ D. $m > f\left(\frac{1}{e}\right) - \frac{1}{e}$

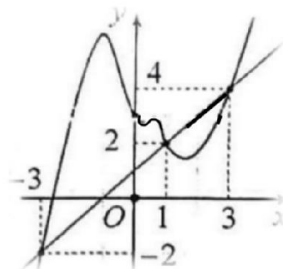
Câu 82. (THPT NGÔ SĨ LIÊN BẮC GIANG NĂM 2018-2019 LẦN 01) Cho hàm số $f(x)$ có bảng biến thiên như sau:

x	-1	0	2	3
$f(x)$		2	3	1
	$\frac{3}{2}$			

Gọi S là tập hợp các số nguyên dương m để bất phương trình $f(x) \geq m(x^3 - 3x^2 + 5)$ có nghiệm thuộc đoạn $[-1; 3]$. Số phần tử của S là

- A. 3 B. Vô số C. 2 D. 0

Câu 83. (CỤM LIÊN TRƯỜNG HẢI PHÒNG NĂM 2018-2019 LẦN 01) Cho hàm số $y = f(x)$ liên tục trên \mathbb{R} . Đồ thị của hàm số $y = f'(x)$ như hình bên. Đặt $g(x) = 2f(x) - (x+1)^2$. Mệnh đề dưới đây đúng.



- A. $\max_{[-3;3]} g(x) = g(3)$. B. $\min_{[-3;3]} g(x) = g(1)$. C. $\max_{[-3;3]} g(x) = g(0)$. D. $\max_{[-3;3]} g(x) = g(1)$.

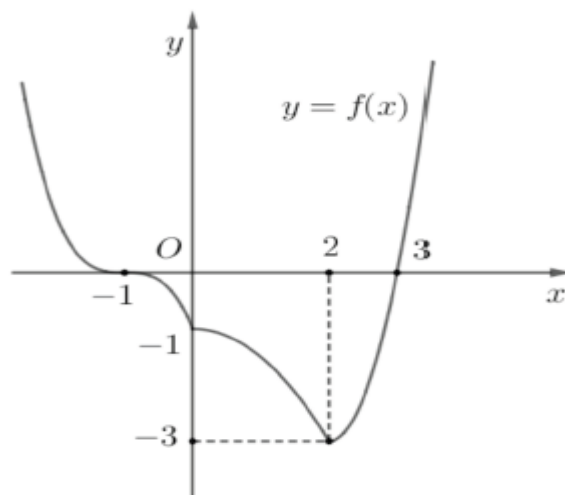
Câu 84. (THPT CHUYÊN VINH PHÚC NĂM 2018-2019 LẦN 3) Cho hàm số $y = f(x)$ có đạo hàm cấp hai trên \mathbb{R} . Biết $f'(0) = 3$, $f'(2) = -2018$ và bảng xét dấu của $f''(x)$ như sau:

x	$-\infty$	0	2	$+\infty$
$f''(x)$	$+$	0	$-$	$+$

Hàm số $y = f(x+2017) + 2018x$ đạt giá trị nhỏ nhất tại điểm x_0 thuộc khoảng nào sau đây?

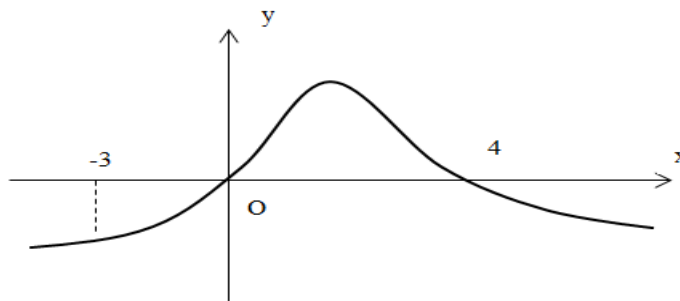
- A. $(-\infty; -2017)$ B. $(2017; +\infty)$ C. $(0; 2)$ D. $(-2017; 0)$

Câu 85. (ĐỀ THI THỬ VTED 02 NĂM HỌC 2018 - 2019) Cho hàm số $f(x)$ liên tục trên \mathbb{R} và có đồ thị như hình vẽ bên. Bất phương trình $2f(x) + x^3 > 2m + 3x^2$ nghiệm đúng với mọi $x \in (-1; 3)$ khi và chỉ khi



- A. $m < -10$. B. $m < -5$. C. $m < -3$. D. $m < -2$.

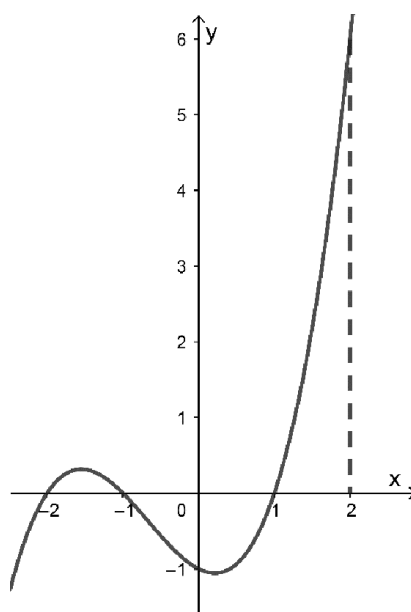
Câu 86. (KTNL GV BẮC GIANG NĂM 2018-2019) Cho hàm số $f(x)$ có đạo hàm trên \mathbb{R} và có đồ thị của hàm $y = f'(x)$ được cho như hình vẽ.



Biết rằng $f(-3) + f(0) = f(4) + f(-1)$. Giá trị lớn nhất và giá trị nhỏ nhất của $f(x)$ trên đoạn $[-3; 4]$ lần lượt là:

- A. $f(4)$ và $f(-3)$. B. $f(-3)$ và $f(0)$. C. $f(4)$ và $f(0)$. D. $f(2)$ và $f(-3)$.

Câu 87. Cho hàm số $f(x)$ có đạo hàm là $f'(x)$. Đồ thị của hàm số $y = f'(x)$ được cho như hình vẽ dưới đây:



Biết rằng $f(-1) + f(0) < f(1) + f(2)$. Giá trị nhỏ nhất và giá trị lớn nhất của hàm số $y = f(x)$ trên đoạn $[-1; 2]$ lần lượt là:

- A. $f(1); f(2)$. B. $f(2); f(0)$. C. $f(0); f(2)$. D. $f(1); f(-1)$.

Dạng 7. Ứng dụng GTLN-GTNN vào bài toán đại số

Câu 88. (THPT CHUYÊN VINH PHÚC LẦN 02 NĂM 2018-2019) Tìm tất cả các giá trị tham số m để bất phương trình $6x + \sqrt{(2+x)(8-x)} \leq x^2 + m - 1$ nghiệm đúng với mọi $x \in [-2; 8]$.

- A. $m \geq 16$ B. $m \geq 15$ C. $m \geq 8$ D. $-2 \leq m \leq 16$

Câu 89. (GKI THPT LƯƠNG THẾ VINH HÀ NỘI NĂM 2018-2019) Tìm m để bất phương trình $x + \frac{4}{x-1} \geq m$ có nghiệm trên khoảng $(-\infty; 1)$.

- A. $m \leq 5$. B. $m \leq -3$. C. $m \leq 1$. D. $m \leq -1$

x	$-\infty$	0	1	$+\infty$
y'	+		- 0	+
y	$-\infty$	0	-1	$+\infty$

Khẳng định nào sau đây là khẳng định đúng?

- A. Hàm số có giá trị cực tiểu bằng 1 .
- B. Hàm số có giá trị lớn nhất bằng 0 và giá trị nhỏ nhất bằng -1 .
- C. Hàm số đạt cực đại tại $x = 0$ và đạt cực tiểu tại $x = 1$.
- D. Hàm số có đúng một cực trị .

Lời giải

Chọn C

Đáp án A sai vì hàm số có 2 điểm cực trị.

Đáp án B sai vì hàm số có giá trị cực tiểu $y = -1$ khi $x = 0$.

Đáp án C sai vì hàm số không có GTLN và GTNN trên \mathbb{R} .

Đáp án D đúng vì hàm số đạt cực đại tại $x = 0$ và đạt cực tiểu tại $x = 1$.

Câu 5. (THPT-THANG-LONG-HA-NOI-NAM-2018-2019 LẦN 01) Cho hàm số $y = f(x)$ liên tục trên $[-3; 2]$ và có bảng biến thiên như sau. Gọi M, m lần lượt là giá trị lớn nhất và giá trị nhỏ nhất của hàm số $y = f(x)$ trên đoạn $[-1; 2]$. Tính $M + m$.

x	-3	-1	0	1	2
$f(x)$	-2	3	0	2	1

A. 3.

B. 2.

C. 1.

D. 4.

Lời giải

Trên đoạn $[-1; 2]$ ta có giá trị lớn nhất $M = 3$ khi $x = -1$ và giá trị nhỏ nhất $m = 0$ khi $x = 0$.

Khi đó $M + m = 3 + 0 = 3$.

Câu 6. (THPT BA ĐÌNH NĂM 2018-2019 LẦN 02) Xét hàm số $y = f(x)$ với $x \in [-1; 5]$ có bảng biến thiên như sau:

x	-1	0	2	5	
y'	+	0	-	0	+
y	3	4	0	$+\infty$	

Khẳng định nào sau đây là đúng

- A. Hàm số đã cho không tồn tại GTLN trên đoạn $[-1; 5]$
- B. Hàm số đã cho đạt GTNN tại $x = -1$ và $x = 2$ trên đoạn $[-1; 5]$
- C. Hàm số đã cho đạt GTNN tại $x = -1$ và đạt GTLN tại $x = 5$ trên đoạn $[-1; 5]$
- D. Hàm số đã cho đạt GTNN tại $x = 0$ trên đoạn $[-1; 5]$

Lời giải

- A. Đúng. Vì $\lim_{x \rightarrow 5^-} y = +\infty$ nên hàm số không có GTLN trên đoạn $[-1; 5]$.
- B. Sai. Hàm số đã cho chỉ đạt GTNN tại $x = 2$ trên đoạn $[-1; 5]$.
- C. Sai. Hàm số đã cho chỉ đạt GTNN tại $x = 2$ trên đoạn $[-1; 5]$ và $\lim_{x \rightarrow 5} y = +\infty$.
- D. Sai. Hàm số đã cho chỉ đạt GTNN tại $x = 2$ trên đoạn $[-1; 5]$.

Câu 7. (CHUYÊN LÊ THÁNH TÔNG NĂM 2018-2019 LẦN 01) Cho hàm số $y = f(x)$ liên tục trên \mathbb{R} , có bảng biến thiên như hình sau:

x	$-\infty$	-1	1	2	$+\infty$
y'	$-$	\parallel	$+$	$+$	$-$
y	$+\infty$	\swarrow	\nearrow	\searrow	\swarrow
		-3		2	-4

Trong các mệnh đề sau, mệnh đề nào **sai**?

- A. Hàm số có hai điểm cực trị.
- B. Hàm số có giá trị lớn nhất bằng 2 và giá trị nhỏ nhất bằng -3.
- C. Đồ thị hàm số có đúng một đường tiệm cận.
- D. Hàm số nghịch biến trên mỗi khoảng $(-\infty; -1), (2; +\infty)$.

Lời giải

Dựa vào BBT ta thấy hàm số không có GTLN, GTNN.

Câu 8. (THPT CHUYÊN LAM SƠN THANH HÓA NĂM 2018-2019 LẦN 01) Cho hàm số $y = f(x)$ liên tục trên \mathbb{R} và có bảng biến thiên như hình vẽ. Mệnh đề nào sau đây đúng?

x	$-\infty$	-2	0	2	$+\infty$
y'	$+$	0	$-$	$+$	$-$
y	$-\infty$	\nearrow	\searrow	\nearrow	\searrow
		4	0	4	$-\infty$

- A. Phương trình $f(x) = 0$ có 4 nghiệm phân biệt
- B. Hàm số đồng biến trên khoảng $(0; +\infty)$
- C. Giá trị nhỏ nhất của hàm số bằng 0
- D. Hàm số có 3 điểm cực trị

Lời giải

Chọn D

Dựa vào bảng biến thiên, hàm số có 3 điểm cực trị.

Câu 9. (CHUYÊN NGUYỄN TẮT THÀNH YÊN BÁI LẦN 01 NĂM 2018-2019) Cho hàm số $y = f(x)$ liên tục và có bảng biến thiên trên đoạn $[-1; 3]$ như hình vẽ bên. Khẳng định nào sau đây **đúng**?

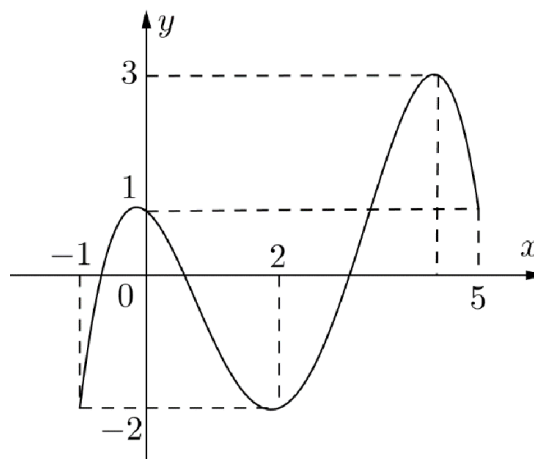
x	-1	0	2	3		
y'		+	0	-	0	+
y	0	5	1	4		

- A. $\max_{[-1;3]} f(x) = f(0)$. B. $\max_{[-1;3]} f(x) = f(3)$.
 C. $\max_{[-1;3]} f(x) = f(2)$. D. $\max_{[-1;3]} f(x) = f(-1)$.

Lời giải

Nhìn vào bảng biến thiên ta thấy $\max_{[-1;3]} f(x) = f(0)$.

Câu 10. (ĐỀ THI THỬ VTED 02 NĂM HỌC 2018 - 2019) Cho hàm số $f(x)$ liên tục trên $[-1;5]$ và có đồ thị trên đoạn $[-1;5]$ như hình vẽ bên dưới. Tổng giá trị lớn nhất và giá trị nhỏ nhất của hàm số $f(x)$ trên đoạn $[-1;5]$ bằng

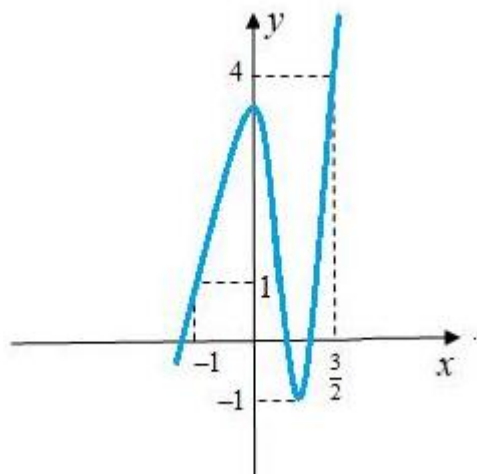


- A. -1 B. 4 **C. 1** D. 2

Lời giải

Từ đồ thị ta thấy:
$$\begin{cases} M = \max_{[-1;5]} f(x) = 3 \\ n = \min_{[-1;5]} f(x) = -2 \end{cases} \Rightarrow M + n = 1.$$

Câu 11. (SỞ GD&ĐT THANH HÓA NĂM 2018 - 2019) Cho hàm số $f(x)$ liên tục trên \mathbb{R} và có đồ thị như hình vẽ sau:



Gọi M và m lần lượt là giá trị lớn nhất và nhỏ nhất của hàm số $f(x)$ trên $\left[-1; \frac{3}{2}\right]$. Giá trị của

$M + m$ bằng

A. $\frac{1}{2}$.

B. 5.

C. 4.

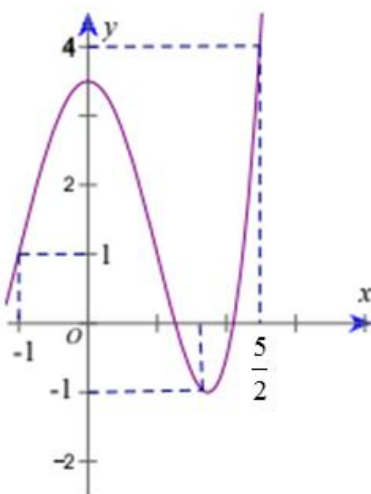
D. 3.

Lời giải

Dựa vào đồ thị hàm số $f(x)$ ta có: $M = \max_{\left[-1; \frac{3}{2}\right]} f(x) = 4$; $m = \min_{\left[-1; \frac{3}{2}\right]} f(x) = -1$.

Do đó $M + m = 4 + (-1) = 3$.

Câu 12. (THPT YÊN MỸ HƯNG YÊN NĂM 2018-2019 LẦN 01) Cho hàm số $y = f(x)$ xác định, liên tục trên $\left[-1; \frac{5}{2}\right]$ và có đồ thị là đường cong như hình vẽ.



Giá trị lớn nhất M và giá trị nhỏ nhất m của hàm số $f(x)$ trên $\left[-1; \frac{5}{2}\right]$ là:

A. $M = 4, m = 1$

B. $M = 4, m = -1$

C. $M = \frac{7}{2}, m = -1$

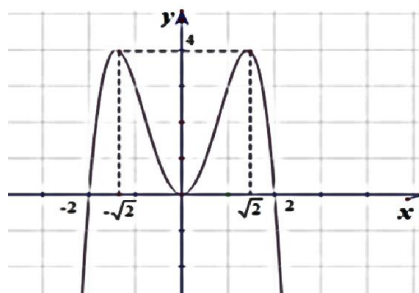
D. $M = \frac{7}{2}, m = 1$

Lời giải

Chọn B

Dựa vào đồ thị $M = 4, m = -1$.

Câu 13. (GKI THPT NGHĨA HƯNG NAM ĐỊNH NĂM 2018-2019) Cho hàm số $y = f(x)$ có đồ thị như hình vẽ. Giá trị lớn nhất của hàm số $f(x)$ trên đoạn $[0; 2]$ là:



- A. $\text{Max}_{[0;2]} f(x) = 2$. B. $\text{Max}_{[0;2]} f(x) = \sqrt{2}$.
 C. $\text{Max}_{[0;2]} f(x) = 4$. D. $\text{Max}_{[0;2]} f(x) = 0$.

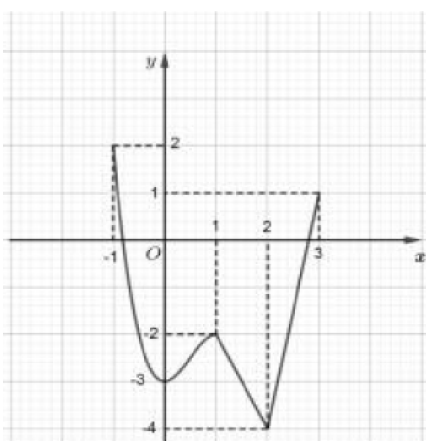
Lời giải

Chọn C

Dựa vào đồ thị ta thấy trên đoạn $[0; 2]$ hàm số $f(x)$ có giá trị lớn nhất bằng 4 khi $x = \sqrt{2}$

Suy ra $\text{Max}_{[0;2]} f(x) = 4$

Câu 14. (SỞ GD&ĐT BẮC GIANG NĂM 2018-2019 LẦN 01) Cho hàm số $y = f(x)$ liên tục trên đoạn $[-1; 3]$ và có đồ thị như hình vẽ bên. Gọi M, m lần lượt là giá trị lớn nhất và giá trị nhỏ nhất của hàm số đã cho trên đoạn $[-1; 3]$. Giá trị của $M + m$ là



- A. 2 B. -6 C. -5 D. -2

Lời giải

Dựa vào đồ thị ta thấy GTLN của hàm số trên đoạn $[-1; 3]$ là $M = 2$ đạt được tại $x = -1$ và GTNN của hàm số trên đoạn $[-1; 3]$ là $m = -4$ đạt được tại $x = 2$

$\Rightarrow M + m = 2 + (-4) = -2$

Câu 15. (SỞ GD&ĐT HÀ NỘI NĂM 2018-2019) Cho hàm số $y = f(x)$ có bảng biến thiên trên $[-5; 7]$ như sau

x	-5	1	7	
y'		-	0	+
y	6		2	9

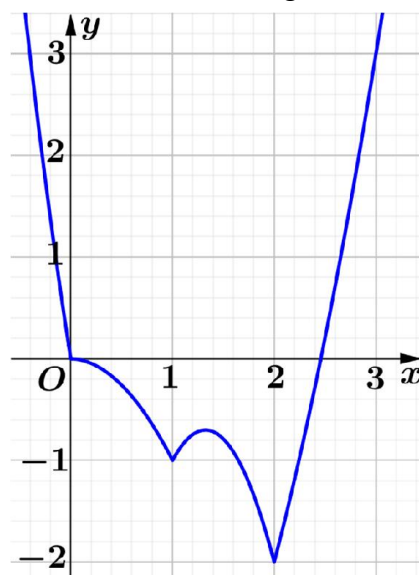
Mệnh đề nào dưới đây **đúng**?

- A. $\text{Min}_{[-5;7]} f(x) = 6.$ B. $\text{Min}_{[-5;7]} f(x) = 2.$ C. $\text{Max}_{[-5;7]} f(x) = 9.$ D. $\text{Max}_{[-5;7]} f(x) = 6.$

Lời giải

Dựa vào bảng biến thiên trên $[-5; 7)$, ta có: $\text{Min}_{[-5;7]} f(x) = f(1) = 2.$

Câu 16. (TT THANH TƯỜNG NGHỆ AN NĂM 2018-2019 LẦN 02) Cho hàm số $f(x)$ liên tục trên đoạn $[0; 3]$ và có đồ thị như hình vẽ bên. Gọi M và m lần lượt là giá trị lớn nhất và nhỏ nhất của hàm số đã cho trên $[0; 3]$. Giá trị của $M + m$ bằng?

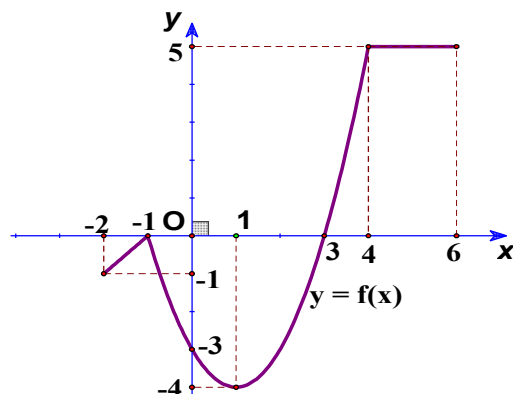


- A. 5. B. 3. C. 2. D. 1.

Lời giải

Dựa vào hình vẽ ta có: $M = 3, m = -2$ nên $M + m = 1.$

Câu 17. (CHUYÊN LÊ QUÝ ĐÔN ĐIỆN BIÊN LẦN 3 NĂM 2018-2019) Cho hàm số $y = f(x)$ liên tục trên đoạn $[-2; 6]$ và có đồ thị như hình vẽ bên dưới.



Gọi M và m lần lượt là giá trị lớn nhất và nhỏ nhất của hàm số đã cho trên đoạn $[-2; 6]$. Giá trị của $M - m$ bằng

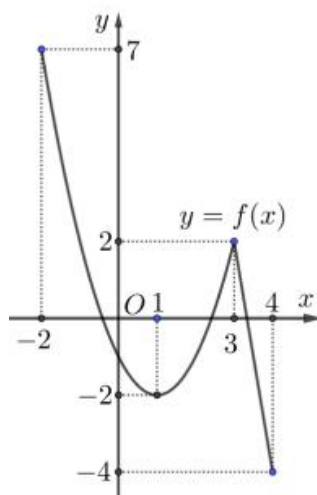
- A. 9. B. -8. C. -9. D. 8.

Lời giải

Từ đồ thị suy ra $-4 \leq f(x) \leq 5 \quad \forall x \in [-2; 6]; f(1) = -4; f(4) = 5$

$$\Rightarrow \begin{cases} M = 5 \\ m = -4 \end{cases} \Rightarrow M - m = 9.$$

Câu 18. (ĐỀ THI THỬ VTED 03 NĂM HỌC 2018 - 2019) Cho hàm số $y = f(x)$ liên tục và có đồ thị trên đoạn $[-2; 4]$ như hình vẽ bên. Tổng giá trị lớn nhất và nhỏ nhất của hàm số $y = f(x)$ trên đoạn $[-2; 4]$ bằng



- A. 5 B. 3 C. 0 D. -2

Lời giải

Chọn B

Dựa vào đồ thị hàm số ta có

$$m = \min_{x \in [-2; 4]} f(x) = -4, \quad M = \max_{x \in [-2; 4]} f(x) = 7$$

Khi đó $M + m = 3$

Câu 19. (THPT NGÔ SĨ LIÊN BẮC GIANG NĂM 2018-2019 LẦN 01) Cho hàm số $y = f(x)$ có bảng xét dấu đạo hàm như sau:

x	$-\infty$	-1	0	1	$+\infty$	
y'		-	-	+	0	-

Mệnh đề nào sau đây đúng

- A. $\max_{(-1; 1]} f(x) = f(0)$ **B. $\max_{(0; +\infty)} f(x) = f(1)$** C. $\min_{(-\infty; -1)} f(x) = f(-1)$ D. $\min_{(-1; +\infty)} f(x) = f(0)$

Lời giải

Chọn B

x	$-\infty$	-1	0	1	$+\infty$
y'		-	- 0 + 0	-	
y				$f(1)$	

Diagram showing arrows from the table to a graph: $f(-1)$ and $f(0)$ are marked on the x-axis, and $f(1)$ is marked on the y-axis.

Dạng 2. Xác định giá trị lớn nhất – giá trị nhỏ nhất của hàm số trên đoạn [a;b]

- Câu 20.** (Mã 102 - BGD - 2019) Giá trị nhỏ nhất của hàm số $f(x) = x^3 - 3x + 2$ trên đoạn $[-3; 3]$ bằng
- A. 0. B. -16. C. 20. D. 4.

Lời giải**Chọn B**

Cách 1: Mode 7 $f(x) = x^3 - 3x + 2$.

Start -3

end 3 step 1

⇒ Chọn B

Cách 2: $f'(x) = 3x^2 - 3$. $f'(x) = 0 \Leftrightarrow x = \pm 1 \in [-3; 3]$.

$f(-3) = -16$; $f(-1) = 4$; $f(1) = 0$; $f(3) = 20$.

⇒ Giá trị nhỏ nhất là -16.

- Câu 21.** (MÃ ĐỀ 110 BGD&ĐT NĂM 2017) Tìm giá trị lớn nhất M của hàm số $y = x^4 - 2x^2 + 3$ trên đoạn $[0; \sqrt{3}]$.

A. $M = 6$

B. $M = 1$

C. $M = 9$

D. $M = 8\sqrt{3}$

Lời giải**Chọn A**

Ta có: $y' = 4x^3 - 4x = 4x(x^2 - 1)$

$$y' = 0 \Leftrightarrow 4x(x^2 - 1) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = 0 \\ x = 1 \\ x = -1(l) \end{cases}$$

Ta có: $y(0) = 3$; $y(1) = 2$; $y(\sqrt{3}) = 6$

Vậy giá trị lớn nhất của hàm số $y = x^4 - 2x^2 + 3$ trên đoạn $[0; \sqrt{3}]$ là $M = y(\sqrt{3}) = 6$

- Câu 22.** (Mã 103 - BGD - 2019) Giá trị lớn nhất của hàm số $f(x) = x^3 - 3x$ trên đoạn $[-3; 3]$ bằng
- A. -2. B. 18. C. 2. D. -18.

Lời giải**Chọn B**

Ta có $y' = 3x^2 - 3 = 0 \Leftrightarrow x = \pm 1$

$f(-3) = -18$; $f(-1) = 2$; $f(1) = -2$; $f(3) = 18$.

- Câu 23.** (ĐỀ MINH HỌA GBD&ĐT NĂM 2017) Tìm giá trị nhỏ nhất của hàm số $y = \frac{x^2 + 3}{x - 1}$ trên đoạn $[2; 4]$.

- A. $\min_{[2;4]} y = -3$ B. $\min_{[2;4]} y = \frac{19}{3}$ C. $\min_{[2;4]} y = 6$ D. $\min_{[2;4]} y = -2$

Lời giải

Chọn C

Tập xác định: $D = \mathbb{R} \setminus \{1\}$

Hàm số $y = \frac{x^2 + 3}{x - 1}$ xác định và liên tục trên đoạn $[2; 4]$

Ta có $y' = \frac{x^2 - 2x - 3}{(x - 1)^2}; y' = 0 \Leftrightarrow x^2 - 2x - 3 = 0 \Leftrightarrow x = 3$ hoặc $x = -1$ (loại)

Suy ra $y(2) = 7; y(3) = 6; y(4) = \frac{19}{3}$. Vậy $\min_{[2;4]} y = 6$ tại $x = 3$.

Câu 24. (Mã đề 104 BGD&ĐT NĂM 2018) Giá trị lớn nhất của hàm số $y = x^4 - x^2 + 13$ trên đoạn $[-1; 2]$ bằng

- A. 85 B. $\frac{51}{4}$ C. 13 D. 25

Lời giải

Chọn D

$$y = f(x) = x^4 - x^2 + 13$$

$$y' = 4x^3 - 2x$$

$$4x^3 - 2x = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = 0 \in [-1; 2] \\ x = -\frac{1}{\sqrt{2}} \in [-1; 2] \\ x = \frac{1}{\sqrt{2}} \in [-1; 2] \end{cases}$$

$$f(-1) = 13; f(2) = 25; f(0) = 13; f\left(-\frac{1}{\sqrt{2}}\right) = \frac{51}{4}; f\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right) = \frac{51}{4}$$

Giá trị lớn nhất của hàm số $y = x^4 - x^2 + 13$ trên đoạn $[-1; 2]$ bằng 25.

Câu 25. (MĐ 104 BGD&ĐT NĂM 2017) Tìm giá trị nhỏ nhất m của hàm số $y = x^2 + \frac{2}{x}$ trên đoạn $\left[\frac{1}{2}; 2\right]$

- A. $m = 5$ B. $m = 3$ C. $m = \frac{17}{4}$ D. $m = 10$

Lời giải

Chọn B

$$\text{Đặt } y = f(x) = x^2 + \frac{2}{x}.$$

$$\text{Ta có } y' = 2x - \frac{2}{x^2} = \frac{2x^3 - 2}{x^2}, y' = 0 \Rightarrow x = 1 \in \left[\frac{1}{2}; 2\right].$$

$$\text{Khi đó } f(1) = 3, f\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{17}{4}, f(2) = 5.$$

$$\text{Vậy } m = \min_{\left[\frac{1}{2}; 2\right]} f(x) = f(1) = 3.$$

Câu 26. (MÃ ĐỀ 123 BGD&ĐT NĂM 2017) Tìm giá trị nhỏ nhất m của hàm số $y = x^3 - 7x^2 + 11x - 2$ trên đoạn $[0; 2]$.

A. $m = 3$

B. $m = 0$

C. $m = -2$

D. $m = 11$

Lời giải

Chọn C

Xét hàm số trên đoạn $[0; 2]$. Ta có $y' = 3x^2 - 14x + 11$ suy ra $y' = 0 \Leftrightarrow x = 1$

Tính $f(0) = -2; f(1) = 3, f(2) = 0$. Suy ra $\min_{[0;2]} f(x) = f(0) = -2 = m$.

Câu 27. (Mã đề 101 BGD&ĐT NĂM 2018) Giá trị lớn nhất của hàm số $y = x^4 - 4x^2 + 9$ trên đoạn $[-2; 3]$ bằng

A. 201

B. 2

C. 9

D. 54

Lời giải

Chọn D

$$y' = 4x^3 - 8x; y' = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = 0 \\ x = \pm\sqrt{2} \end{cases}$$

Ta có $y(-2) = 9; y(3) = 54; y(0) = 9; y(\pm\sqrt{2}) = 5$.

Vậy $\max_{[-2;3]} y = 54$.

Câu 28. (ĐỀ THAM KHẢO BGD & ĐT 2018) Giá trị lớn nhất của hàm số $f(x) = x^4 - 4x^2 + 5$ trên đoạn $[-2; 3]$ bằng

A. 122

B. 50

C. 5

D. 1

Lời giải

Chọn B

$$f'(x) = 4x^3 - 8x = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = 0 \\ x = \pm\sqrt{2} \in [-2; 3]; \end{cases}$$

$f(0) = 5; f(\pm\sqrt{2}) = 1; f(-2) = 5; f(3) = 50$

Vậy $\text{Max } y = 50$

Câu 29. (MĐ 105 BGD&ĐT NĂM 2017) Tìm giá trị nhỏ nhất m của hàm số $y = x^4 - x^2 + 13$ trên đoạn $[-2; 3]$.

A. $m = 13$

B. $m = \frac{51}{4}$

C. $m = \frac{51}{2}$

D. $m = \frac{49}{4}$

Lời giải

Chọn B

$$y' = 4x^3 - 2x; y' = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = 0 \in [-2; 3] \\ x = \pm\frac{1}{\sqrt{2}} \in [-2; 3]; \end{cases}$$

Tính $y(-2) = 25, y(3) = 85, y(0) = 13, y\left(\pm\frac{1}{\sqrt{2}}\right) = \frac{51}{4} = 12,75;$

Kết luận: giá trị nhỏ nhất m của hàm số là $m = \frac{51}{4}$.

- Câu 30. (Mã đề 104 - BGD - 2019)** Giá trị nhỏ nhất của hàm số $f(x) = x^3 - 3x$ trên đoạn $[-3; 3]$ bằng
 A. -18. B. -2. C. 2. D. 18.

Lời giải

Chọn A

$$\text{Ta có } f'(x) = 3x^2 - 3 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = 1 \\ x = -1 \end{cases}$$

$$\text{Mà } f(-3) = -18; f(-1) = 2; f(1) = -2; f(3) = 18.$$

Vậy giá trị nhỏ nhất của hàm số $f(x) = x^3 - 3x$ trên đoạn $[-3; 3]$ bằng -18 .

- Câu 31. (MĐ 103 BGD&ĐT NĂM 2017-2018)** Giá trị nhỏ nhất của hàm số $y = x^3 + 3x^2$ trên đoạn $[-4; -1]$ bằng

- A. -16 B. 0 C. 4 D. -4

Lời giải

Chọn A

$$\text{Ta có } y' = 3x^2 + 6x; y' = 0 \Rightarrow 3x^2 + 6x = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = 0 \notin [-4; -1] \\ x = -2 \in [-4; -1] \end{cases}$$

$$\text{Khi đó } y(-4) = -16; y(-2) = 4; y(-1) = 2.$$

$$\text{Nên } \min_{[-4; -1]} y = -16.$$

- Câu 32. (Mã đề 102 BGD&ĐT NĂM 2018)** Giá trị nhỏ nhất của hàm số $y = x^3 + 2x^2 - 7x$ trên đoạn $[0; 4]$ bằng

- A. -259 B. 68 C. 0 D. -4

Lời giải

Chọn D

$$\text{TXĐ } D = \mathbb{R}.$$

Hàm số liên tục trên đoạn $[0; 4]$.

$$\text{Ta có } y' = 3x^2 + 4x - 7$$

$$y' = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = 1 \in [0; 4] \\ x = -\frac{7}{3} \notin [0; 4] \end{cases}$$

$$y(0) = 0; y(1) = -4; y(4) = 68.$$

$$\text{Vậy } \min_{[0; 4]} y = -4.$$

- Câu 33. (Mã đề 101 - BGD - 2019)** Giá trị lớn nhất của hàm số $f(x) = x^3 - 3x + 2$ trên đoạn $[-3; 3]$ là
 A. 4. B. -16. C. 20. D. 0.

Lời giải

Chọn C

$$f(x) = x^3 - 3x + 2 \text{ tập xác định } \mathbb{R}.$$

$$f'(x) = 0 \Leftrightarrow 3x^2 - 3 = 0 \Leftrightarrow x = \pm 1 \in [-3; 3].$$

$$f(1) = 0; f(-1) = 4; f(3) = 20; f(-3) = -16.$$

Từ đó suy ra $\max_{[-3;3]} f(x) = f(3) = 20$.

Dạng 3. Xác định giá trị lớn nhất – giá trị nhỏ nhất của hàm số trên khoảng (a;b)

Câu 34. (ĐỀ THAM KHẢO BGD&ĐT NĂM 2017) Tính giá trị nhỏ nhất của hàm số $y = 3x + \frac{4}{x^2}$ trên khoảng $(0; +\infty)$.

- A. $\min_{(0;+\infty)} y = \frac{33}{5}$ B. $\min_{(0;+\infty)} y = 2\sqrt[3]{9}$ C. $\min_{(0;+\infty)} y = 3\sqrt[3]{9}$ D. $\min_{(0;+\infty)} y = 7$

Lời giải

Chọn C

Cách 1:

$$y = 3x + \frac{4}{x^2} = \frac{3x}{2} + \frac{3x}{2} + \frac{4}{x^2} \geq 3\sqrt[3]{\frac{3x}{2} \cdot \frac{3x}{2} \cdot \frac{4}{x^2}} = 3\sqrt[3]{9}$$

Dấu "=" xảy ra khi $\frac{3x}{2} = \frac{4}{x^2} \Leftrightarrow x = \sqrt[3]{\frac{8}{3}}$.

Vậy $\min_{(0;+\infty)} y = 3\sqrt[3]{9}$

Cách 2:

Xét hàm số $y = 3x + \frac{4}{x^2}$ trên khoảng $(0; +\infty)$

Ta có $y = 3x + \frac{4}{x^2} \Rightarrow y' = 3 - \frac{8}{x^3}$

Cho $y' = 0 \Leftrightarrow \frac{8}{x^3} = 3 \Leftrightarrow x^3 = \frac{8}{3} \Leftrightarrow x = \sqrt[3]{\frac{8}{3}}$

x	0	$\sqrt[3]{\frac{8}{3}}$	$+\infty$
y'		-	0
y			+

\searrow $3\sqrt[3]{9}$ \nearrow

$$\Rightarrow \min_{(0;+\infty)} y = y\left(\sqrt[3]{\frac{8}{3}}\right) = 3\sqrt[3]{9}$$

Câu 35. (CHUYÊN LƯƠNG THẾ VINH ĐỒNG NAI NĂM 2018-2019 LẦN 01) Gọi m là giá trị nhỏ nhất của hàm số $y = x + \frac{4}{x}$ trên khoảng $(0; +\infty)$. Tìm m

- A. $m = 4$. B. $m = 2$. C. $m = 1$. D. $m = 3$.

Lời giải

$$y' = 1 - \frac{4}{x^2}$$

$$y' = 0 \Leftrightarrow x = \pm 2; \quad x = 2 \in (0; +\infty).$$

Bảng biến thiên:

x	0	2	$+\infty$	
y'		-	0	+
y	$+\infty$		4	$+\infty$

Suy ra giá trị nhỏ nhất của hàm số bằng $y(2) = 4 \Rightarrow m = 4$.

Câu 36. (THPT - YÊN ĐỊNH THANH HÓA 2018 2019- LẦN 2) Gọi a là giá trị nhỏ nhất của hàm số

$y = x^2 + \frac{4}{x}$ trên khoảng $(0; +\infty)$. Tìm a .

A. $3\sqrt[3]{4}$.

B. 5.

C. 6. D. $2\sqrt[3]{16}$.

Lời giải.

Ta có: $y = x^2 + \frac{4}{x} \Rightarrow y' = 2x - \frac{4}{x^2} = \frac{2x^3 - 4}{x^2}$.

$y' = 0 \Leftrightarrow 2x^3 - 4 = 0 \Leftrightarrow x = \sqrt[3]{2}$.

Bảng biến thiên

x	0	$\sqrt[3]{2}$	$+\infty$	
y'		-	0	+
y	$+\infty$		$3\sqrt[3]{4}$	$+\infty$

Nhìn vào BBT ta thấy giá trị nhỏ nhất của hàm số là $a = 3\sqrt[3]{4}$.

Câu 37. (THPT MINH CHÂU HÙNG YÊN NĂM 2018 – 2019) Giá trị nhỏ nhất của hàm số

$y = x - 5 + \frac{1}{x}$ trên khoảng $(0; +\infty)$ bằng bao nhiêu?

A. 0

B. -1

C. -3

D. -2

Lời giải

Chọn C

Áp dụng bất đẳng thức Cô – si ta có:

$y = x + \frac{1}{x} - 5 \geq 2\sqrt{x \cdot \frac{1}{x}} - 5 = -3$

Dấu bằng xảy ra khi $x = \frac{1}{x} \Leftrightarrow x^2 = 1 \Leftrightarrow x = 1$ (vì $x > 0$).

Vậy $\min_{(0; +\infty)} y = -3$.

Câu 38. (THPT CHUYÊN BẮC GIANG NAM 2018-2019 LẦN 01) Giá trị nhỏ nhất của hàm số

$f(x) = x + \frac{1}{x}$ trên nửa khoảng $[2; +\infty)$ là:

A. 2

B. $\frac{5}{2}$

C. 0

D. $\frac{7}{2}$

Lời giải

Chọn B

Áp dụng bất đẳng thức Cô-si, ta được: $f(x) = x + \frac{1}{x} = \frac{3x}{4} + \frac{x}{4} + \frac{1}{x} \geq \frac{3 \cdot 2}{4} + 2\sqrt{\frac{x}{4} \cdot \frac{1}{x}} = \frac{5}{2}$.

Dấu bằng xảy ra khi $x = 2$.

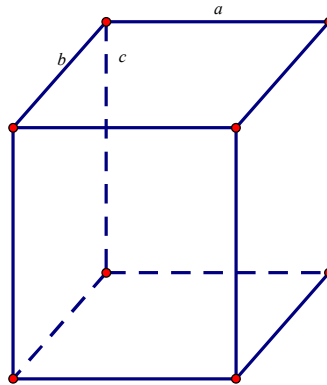
Dạng 4. Ứng dụng GTLN-GTNN vào bài toán thực tế

Câu 39. (Mã đề 101 BGD&ĐT NĂM 2018) Ông A dự định dùng hết $6,5m^2$ kính để làm một bể cá có dạng hình hộp chữ nhật không nắp, chiều dài gấp đôi chiều rộng (các mối ghép có không đáng kể). Bể cá có dung tích lớn nhất bằng bao nhiêu (kết quả làm tròn đến hàng phần trăm).

- A. $2,26 m^3$ B. $1,61 m^3$ C. $1,33 m^3$ D. $1,50 m^3$

Lời giải

Chọn D



Giả sử hình hộp chữ nhật có kích thước như hình vẽ. Ta có dung tích của bể cá: $V = abc$

Mặt khác theo giả thiết ta có:
$$\begin{cases} ab + 2bc + 2ac = 6,5 \\ a = 2b \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2b^2 + 6bc = 6,5 \\ a = 2b \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} c = \frac{6,5 - 2b^2}{6b} \\ a = 2b \end{cases}$$

Khi đó $V = 2b^2 \cdot \frac{6,5 - 2b^2}{6b} \Leftrightarrow V = \frac{6,5b - 2b^3}{3}$.

Xét hàm số: $f(b) = \frac{6,5b - 2b^3}{3}$. Có BBT

b	0	$\frac{\sqrt{39}}{6}$	$+\infty$
$f'(b)$	+	0	-
$f(b)$	0	$f\left(\frac{\sqrt{39}}{6}\right)$	$-\infty$

Vậy bể cá có dung tích lớn nhất là: $f\left(\frac{\sqrt{39}}{6}\right) = 1,50 m^3$.

Câu 40. (MĐ 104 BGD&ĐT NĂM 2017) Một vật chuyển động theo quy luật $s = -\frac{1}{3}t^3 + 6t^2$ với t (giây)

là khoảng thời gian tính từ khi vật bắt đầu chuyển động và s (mét) là quãng đường vật di chuyển được trong khoảng thời gian đó. Hỏi trong khoảng thời gian 9 giây kể từ khi bắt đầu chuyển động, vận tốc lớn nhất của vật đạt được bằng bao nhiêu?

- A. 243 (m/s) B. 27 (m/s) C. 144 (m/s) D. 36 (m/s)

Lời giải

Chọn D

Ta có: $v = s' = -t^2 + 12t$; $v' = -2t + 12$; $v' = 0 \Leftrightarrow t = 6$.

BBT

t	0	6	9
v'	+	0	-
v			

Nhìn bbt ta thấy vận tốc đạt giá trị lớn nhất khi $t = 6$. Giá trị lớn nhất là $v(6) = 36\text{m/s}$.

Câu 41. (MĐ 103 BGD&ĐT NĂM 2017-2018) Ông A dự định sử dụng hết 5 m^2 kính để làm một bể cá bằng kính có dạng hình hộp chữ nhật không nắp, chiều dài gấp đôi chiều rộng (các mối ghép có kích thước không đáng kể). Bể cá có dung tích lớn nhất bằng bao nhiêu (kết quả làm tròn đến hàng phần trăm)?

A. $1,01\text{ m}^3$

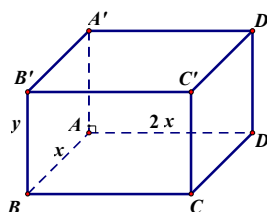
B. $0,96\text{ m}^3$

C. $1,33\text{ m}^3$

D. $1,51\text{ m}^3$

Lời giải

Chọn A



Gọi x, y lần lượt là chiều rộng và chiều cao của bể cá (điều kiện $x, y > 0$).

Ta có thể tích bể cá $V = 2x^2y$.

Theo đề bài ta có: $2xy + 2.2xy + 2x^2 = 5 \Leftrightarrow 6xy + 2x^2 = 5$

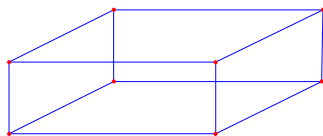
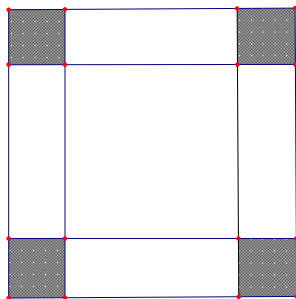
$$\Leftrightarrow y = \frac{5 - 2x^2}{6x} \quad (\text{Điều kiện } y > 0 \Leftrightarrow 5 - 2x^2 > 0 \Rightarrow 0 < x < \sqrt{\frac{5}{2}})$$

$$\Rightarrow V = 2x^2 \frac{5 - 2x^2}{6x} = \frac{5x - 2x^3}{3} \Rightarrow V' = \frac{5 - 6x^2}{3} \Rightarrow V' = 0 \Leftrightarrow 5 - 6x^2 = 0 \Leftrightarrow x = \sqrt{\frac{5}{6}}$$

x	0	$\sqrt{\frac{5}{6}}$	$\sqrt{\frac{5}{2}}$
V'	+	0	-
V	0	$\frac{5\sqrt{30}}{27}$	0

$$\Rightarrow V_{\max} = \frac{5\sqrt{30}}{27} \approx 1,01\text{ m}^3.$$

Câu 42. (ĐỀ MINH HỌA GBD&ĐT NĂM 2017) Cho một tấm nhôm hình vuông cạnh 12 cm. Người ta cắt ở bốn góc của tấm nhôm đó bốn hình vuông bằng nhau, mỗi hình vuông có cạnh bằng x (cm), rồi gập tấm nhôm lại như hình vẽ dưới đây để được một cái hộp không nắp. Tìm x để hộp nhận được có thể tích lớn nhất.



A. $x = 3$

B. $x = 2$

C. $x = 4$

D. $x = 6$

Lời giải

Chọn E

Ta có : $h = x$ (cm) là đường cao hình hộp

Vì tấm nhôm được gấp lại tạo thành hình hộp nên cạnh đáy của hình hộp là: $12 - 2x$ (cm)

Vậy diện tích đáy hình hộp $S = (12 - 2x)^2$ (cm²). Ta có: $\begin{cases} x > 0 \\ 12 - 2x > 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x > 0 \\ x < 6 \end{cases} \Leftrightarrow x \in (0; 6)$

Thể tích của hình hộp là: $V = S.h = x.(12 - 2x)^2$

Xét hàm số: $y = x.(12 - 2x)^2 \quad \forall x \in (0; 6)$

Ta có : $y' = (12 - 2x)^2 - 4x(12 - 2x) = (12 - 2x)(12 - 6x)$;

$y' = 0 \Leftrightarrow (12 - 2x).(12 - 6x) = 0 \Leftrightarrow x = 2$ hoặc $x = 6$ (loại).

x	0	2	6
y'		+	0 -
y		↗ ↘	

Suy ra với $x = 2$ thì thể tích hộp là lớn nhất và giá trị lớn nhất đó là $y(2) = 128$.

Câu 43. (KTNL GIA BÌNH NĂM 2018-2019) Một chất điểm chuyển động theo phương trình $S = -t^3 + 3t^2 - 2$, trong đó t tính bằng giây và S tính theo mét. Chuyển động có vận tốc lớn nhất là

A. 1 m/s.

B. 4 m/s.

C. 3 m/s.

D. 2 m/s.

Lời giải

Chọn C

$S = -t^3 + 3t^2 - 2 \Rightarrow v = -3t^2 + 6t = -3(t - 1)^2 + 3 \leq 3$.

Do đó $\max v = 3$ (m / s).

Câu 44. (THPT NĂM 2018-2019 LẦN 04) Một loại thuốc được dùng cho một bệnh nhân và nồng độ thuốc trong máu của bệnh nhân được giám sát bởi bác sĩ. Biết rằng nồng độ thuốc trong máu của bệnh nhân sau khi tiêm vào cơ thể trong t giờ được cho bởi công thức $c(t) = \frac{t}{t^2 + 1}$ (mg / L). Sau khi tiêm thuốc bao lâu thì nồng độ thuốc trong máu của bệnh nhân cao nhất?

A. 4 giờ.

B. 1 giờ.

C. 3 giờ.

D. 2 giờ.

Lời giải

Xét hàm số $c(t) = \frac{t}{t^2 + 1}$, ($t > 0$).

$$c'(t) = \frac{1-t^2}{(t^2+1)^2}$$

$$c'(t) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} t=1 \\ t=-1 \end{cases}$$

t	0	1	$+\infty$
$c'(t)$	+	0	-
$c(t)$	0	$\frac{1}{2}$	0

Với $t = 1$ giờ thì nồng độ thuốc trong máu của bệnh nhân cao nhất.

Câu 45. (THPT YÊN MỸ HƯNG YÊN NĂM 2018-2019 LẦN 01) Đợt xuất khẩu gạo của tỉnh A thường kéo dài trong 2 tháng (60 ngày). Người ta nhận thấy số lượng xuất khẩu gạo tính theo ngày thứ t được xác định bởi công thức $S(t) = \frac{2}{5}t^3 - 63t^2 + 3240t - 3100$ với $(1 \leq t \leq 60)$. Hỏi trong 60 ngày đó thì ngày thứ mấy có số lượng xuất khẩu gạo cao nhất.

A. 60

B. 45

C. 30

D. 25

Lời giải

Chọn B

$$S(t) = \frac{2}{5}t^3 - 63t^2 + 3240t - 3100 \Rightarrow S'(t) = \frac{6}{5}t^2 - 126t + 3240$$

$$\text{Ta có: } S'(t) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} t = 45 \\ t = 60 \end{cases}$$

x	1	45	60		
S'		+	0	-	0
S			51575		
		77.4			50900

Câu 46. (GKI NHÂN CHÍNH HÀ NỘI NĂM 2018-2019 LẦN 01) Một vật chuyển động theo quy luật

$$S = 10t^2 - \frac{1}{3}t^3, \text{ với } t \text{ (giây) là khoảng thời gian tính từ lúc vật bắt đầu chuyển động và } S(m) \text{ là}$$

quãng đường vật đi được trong khoảng thời gian đó. Hỏi trong khoảng thời gian 15 giây từ lúc vật bắt đầu chuyển động vận tốc $v(m/s)$ của vật đạt giá trị lớn nhất tại thời điểm $t(s)$ bằng:

A. $8(s)$.

B. $20(s)$

C. $10(s)$.

D. $15(s)$.

Lời giải

Chọn C

$$\text{Ta có: } S = 10t^2 - \frac{1}{3}t^3 \Rightarrow v(t) = S' = 20t - t^2.$$

$$\text{Xét hàm số } v(t); t \in [0; 15], \text{ ta có: } v'(t) = 20 - 2t = 0 \Leftrightarrow t = 10.$$

$$v(0) = 0; v(15) = 75; v(10) = 100. \text{ Do đó: } \max_{[0; 15]} v(t) = 100 \Leftrightarrow t = 10.$$

Câu 47. (CHUYÊN LÊ QUÝ ĐÓN ĐIỆN BIÊN NĂM 2018-2019 LẦN 02) Một sợi dây có chiều dài $28m$ được cắt thành hai đoạn để làm thành một hình vuông và một hình tròn. Tính chiều dài (theo đơn vị mét) của đoạn dây làm thành hình vuông được cắt ra sao cho tổng diện tích của hình vuông và hình tròn là nhỏ nhất?

- A. $\frac{56}{4+\pi}$. B. $\frac{112}{4+\pi}$. C. $\frac{84}{4+\pi}$. D. $\frac{92}{4+\pi}$.

Lời giải

Gọi chiều dài của đoạn dây làm thành hình vuông là $x(m)$ ($0 < x < 28$)
 \Rightarrow chiều dài của đoạn dây làm thành hình tròn là $28 - x(m)$

+) Diện tích hình vuông là: $\left(\frac{x}{4}\right)^2 = \frac{x^2}{16}$

+) Bán kính hình tròn là: $R = \frac{28-x}{2\pi}$

\Rightarrow Diện tích hình tròn: $\pi R^2 = \pi \cdot \left(\frac{28-x}{2\pi}\right)^2 = \frac{784-56x+x^2}{4\pi}$

+) Tổng diện tích hai hình: $\frac{x^2}{16} + \frac{784-56x+x^2}{4\pi} = \left(\frac{\pi+4}{16\pi}\right)x^2 - \frac{14}{\pi}x + \frac{196}{\pi}$

Xét $f(x) = \left(\frac{\pi+4}{16\pi}\right)x^2 - \frac{14}{\pi}x + \frac{196}{\pi}$. Nhận thấy $f(x)$ đạt giá trị nhỏ nhất tại

$$x = \frac{-b}{2a} = \frac{14}{\pi} \cdot \frac{16\pi}{2(\pi+4)} = \frac{112}{\pi+4}$$

Vậy chiều dài của đoạn dây làm thành hình vuông để tổng diện tích của hai hình đạt giá trị nhỏ nhất là $\frac{112}{4+\pi} m$

Câu 48. (PEN I - THẦY LÊ ANH TUẤN - ĐỀ 3 - NĂM 2019) Một xưởng in có 15 máy in được cài đặt tự động và giám sát bởi một kỹ sư, mỗi máy in có thể in được 30 ấn phẩm trong 1 giờ, chi phí cài đặt và bảo dưỡng cho mỗi máy in cho 1 đợt hàng là 48.000 đồng, chi phí trả cho kỹ sư giám sát là 24.000 đồng/giờ. Đợt hàng này xưởng in nhận 6000 ấn phẩm thì số máy in cần sử dụng để chi phí in ít nhất là

- A. 10 máy. B. 11 máy. C. 12 máy. D. 9 máy.

Lời giải

Chọn A

Gọi x ($0 < x < 15$) là số máy in cần sử dụng để in lô hàng.

Chi phí cài đặt và bảo dưỡng là $48000x$.

Số giờ in hết số ấn phẩm là $\frac{6000}{30x}$, chi phí giám sát là $\frac{6000}{30x} \cdot 24000 + \frac{48000}{x}$.

Tổng chi phí in là $P(x) = 48000x + \frac{4800000}{x}$.

$$P'(x) = 48000 - \frac{4800000}{x^2}; P'(x) = 0 \Leftrightarrow x^2 = 100 \Leftrightarrow \begin{cases} x = 10 \\ x = -10 (L) \end{cases}$$

Bảng biến thiên:

x	0	10	15	
$P'(x)$		-	0	+
$P(x)$				

\swarrow $P(10)$ \searrow

Vậy chi phí in nhỏ nhất là 10 máy.

Câu 49. Một chất điểm chuyển động thẳng với quãng đường biến thiên theo thời gian bởi quy luật $s(t) = t^3 - 4t^2 + 12$ (m), trong đó t (s) là khoảng thời gian tính từ lúc bắt đầu chuyển động. Vận tốc của chất điểm đó đạt giá trị bé nhất khi t bằng bao nhiêu?

- A. 2 (s). B. $\frac{8}{3}$ (s). C. 0 (s). **D. $\frac{4}{3}$ (s).**

Lời giải

$$v(t) = s'(t) = 3t^2 - 8t.$$

$$v'(t) = 6t - 8. \text{ Có } v'(t) = 0 \Leftrightarrow t = \frac{4}{3}.$$

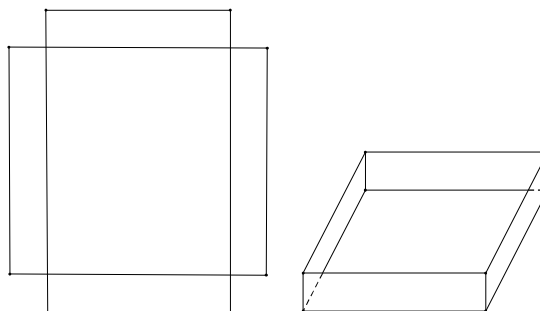
t	0	$\frac{4}{3}$	$+\infty$	
v'		-	0	+
v	0		$-\frac{16}{3}$	$+\infty$

\swarrow $-\frac{16}{3}$ \searrow

Dựa vào bảng biến thiên ta có $\min_{[0;+\infty)} v = v\left(\frac{4}{3}\right) = -\frac{16}{3}$.

Vậy vận tốc của chất điểm đó đạt giá trị bé nhất khi $t = \frac{4}{3}$.

Câu 50. (THPT MINH CHÂU HƯNG YÊN NĂM 2018 – 2019) Cho một tấm nhôm hình chữ nhật có chiều dài bằng 10cm và chiều rộng bằng 8cm. Người ta cắt bỏ ở bốn góc của tấm nhôm đó bốn hình vuông bằng nhau, mỗi hình vuông có cạnh bằng x (cm), rồi gập tấm nhôm lại (như hình vẽ) để được một cái hộp không nắp. Tìm x để hộp nhận được có thể tích lớn nhất.



- A. $x = \frac{8-2\sqrt{21}}{3}$ B. $x = \frac{10-2\sqrt{7}}{3}$ C. $x = \frac{9+\sqrt{21}}{9}$ **D. $x = \frac{9-\sqrt{21}}{3}$**

Lời giải

Chọn D

Ta có : $h = x$ (cm) là đường cao hình hộp

Vì tấm nhôm được gấp lại tạo thành hình hộp nên cạnh đáy của hình hộp là: $10 - 2x$ (cm) và $8 - 2x$ (cm)

Vậy diện tích đáy hình hộp $S = (10 - 2x)(8 - 2x)$ (cm²). Ta có:

$$\begin{cases} x > 0 \\ 10 - 2x > 0 \\ 8 - 2x > 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x > 0 \\ x < 4 \end{cases} \Leftrightarrow x \in (0; 4)$$

Thể tích của hình hộp là: $V = S.h = x.(10 - 2x).(8 - 2x)$

Xét hàm số: $y = x.(10 - 2x).(8 - 2x) \forall x \in (0; 4)$

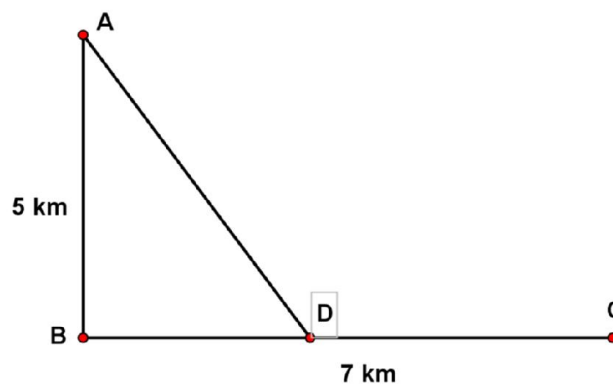
Ta có : $y' = 12x^2 - 72x + 80$;

$$y' = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = \frac{9 + \sqrt{21}}{3} > 4 \text{ (l)} \\ x = \frac{9 - \sqrt{21}}{3} \text{ (n)} \end{cases}$$

x	0	$\frac{9 - \sqrt{21}}{3}$	4
y'	+	0	-
y			

Suy ra với $x = \frac{9 - \sqrt{21}}{3}$ thì thể tích hộp là lớn nhất và giá trị lớn nhất.

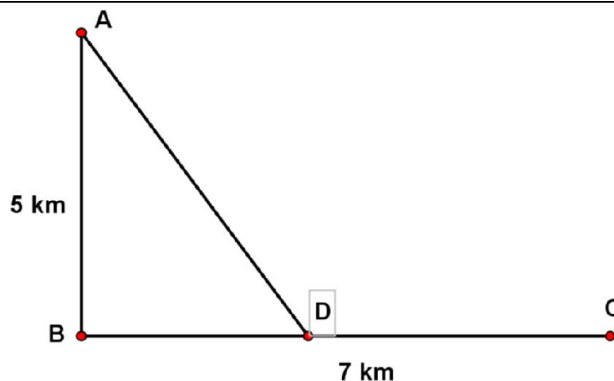
Câu 51. (GKI THPT VIỆT ĐỨC HÀ NỘI NĂM 2018-2019) Một đoàn cứu trợ lũ lụt đang ở vị trí A của một tỉnh miền trung muốn đến xã C để tiếp tế lương thực và thuốc men. Để đi đến C , đoàn cứu trợ phải chèo thuyền từ A đến vị trí D với vận tốc $4(km/h)$, rồi đi bộ đến vị trí C với vận tốc $6(km/h)$. Biết A cách B một khoảng $5km$, B cách C một khoảng $7km$ (hình vẽ). Hỏi vị trí điểm D cách A bao xa để đoàn cứu trợ đi đến xã C nhanh nhất?



- A. $AD = 5\sqrt{3} km$. B. $AD = 2\sqrt{5} km$. C. $AD = 5\sqrt{2} km$. **D. $AD = 3\sqrt{5} km$.**

Lời giải

Chọn E



Đặt $AD = x (km), (x > 0)$. Ta có

$$BD = \sqrt{AD^2 - AB^2} = \sqrt{x^2 - 25} \quad (x \geq 5)$$

$$CD = BC - BD = 7 - \sqrt{x^2 - 25}$$

Thời gian đi từ A đến C là: $T(x) = \frac{AD}{4} + \frac{DC}{6} = \frac{x}{4} + \frac{7 - \sqrt{x^2 - 25}}{6}$

$$T'(x) = \frac{1}{4} + \frac{-2x}{12\sqrt{x^2 - 25}} = \frac{3\sqrt{x^2 - 25} - 2x}{12\sqrt{x^2 - 25}}$$

$$T'(x) = 0 \Leftrightarrow 3\sqrt{x^2 - 25} = 2x \Leftrightarrow x = 3\sqrt{5}$$

Bảng biến thiên

x	5	$3\sqrt{5}$	$+\infty$	
T'		+	0	-
T	$\frac{29}{12}$		$\frac{14 + 5\sqrt{5}}{12}$	$+\infty$

Do đó $\min_{x \in [5; +\infty)} T(x) = T(3\sqrt{5}) = \frac{14 + 5\sqrt{5}}{12}$

Vậy $AD = 3\sqrt{5} (km)$.

Dạng 5. Định m để GTLN-GTNN của hàm số thỏa mãn điều kiện cho trước

Câu 52. (MÃ ĐỀ 123 BGD&ĐT NĂM 2017) Cho hàm số $y = \frac{x+m}{x-1}$ (m là tham số thực) thỏa mãn

$\min_{[2;4]} y = 3$. Mệnh đề nào dưới đây đúng?

A. $m > 4$

B. $3 < m \leq 4$

C. $m < -1$

D. $1 \leq m < 3$

Lời giải

Chọn A

Ta có $y' = \frac{-1-m}{(x-1)^2}$

* TH 1. $-1-m > 0 \Leftrightarrow m < -1$ suy ra y đồng biến trên $[2;4]$ suy ra

$$\min_{[2;4]} f(x) = f(2) = \frac{2+m}{1} = 3 \Leftrightarrow m = 1 \text{ (loại)}$$

* TH 2. $-1-m < 0 \Leftrightarrow m > -1$ suy ra y nghịch biến trên $[2;4]$ suy ra

$$\min_{[2;4]} f(x) = f(4) = \frac{4+m}{3} = 3 \Leftrightarrow m = 5 \text{ suy ra } m > 4.$$

Câu 53. (ĐỀ THAM KHẢO BGD & ĐT 2018) Gọi S là tập hợp tất cả các giá trị của tham số thực m sao cho giá trị lớn nhất của hàm số $y = |x^3 - 3x + m|$ trên đoạn $[0;2]$ bằng 3. Số phần tử của S là

A. 0

B. 6

C. 1

D. 2

Lời giải

Chọn D

Xét hàm số $f(x) = x^3 - 3x + m$, ta có $f'(x) = 3x^2 - 3$. Ta có bảng biến thiên của $f(x)$:

x	0	1	2	
$f'(x)$		-	0	+
$f(x)$	m		$-2+m$	$2+m$

TH 1: $2+m < 0 \Leftrightarrow m < -2$. Khi đó $\max_{[0;2]} |f(x)| = -(-2+m) = 2-m$

$$2-m=3 \Leftrightarrow m=-1 \text{ (loại)}.$$

TH 2: $\begin{cases} 2+m > 0 \\ m < 0 \end{cases} \Leftrightarrow -2 < m < 0$. Khi đó: $|m-2| = 2-m > 2 > 2+m$

$$\Rightarrow \max_{[0;2]} |f(x)| = -(-2+m) = 2-m$$

$$2-m=3 \Leftrightarrow m=-1 \text{ (thỏa mãn)}.$$

TH 3: $\begin{cases} m > 0 \\ -2+m < 0 \end{cases} \Leftrightarrow 0 < m < 2$. Khi đó: $|m-2| = 2-m < 2 < 2+m \Rightarrow \max_{[0;2]} |f(x)| = 2+m$

$$2+m=3 \Leftrightarrow m=1 \text{ (thỏa mãn)}.$$

TH 4: $-2+m > 0 \Leftrightarrow m > 2$. Khi đó $\max_{[0;2]} |f(x)| = 2+m$

$$2+m=3 \Leftrightarrow m=1 \text{ (loại)}.$$

Câu 54. (MÃ ĐỀ 110 BGD&ĐT NĂM 2017) Cho hàm số $y = \frac{x+m}{x+1}$ (m là tham số thực) thỏa mãn

$$\min_{[1;2]} y + \max_{[1;2]} y = \frac{16}{3}. \text{ Mệnh đề nào dưới đây đúng?}$$

A. $m > 4$

B. $2 < m \leq 4$

C. $m \leq 0$

D. $0 < m \leq 2$

Lời giải

Chọn A

$$\text{Ta có } y' = \frac{1-m}{(x+1)^2}.$$

Nếu $m = 1 \Rightarrow y = 1, \forall x \neq -1$. Không thỏa mãn yêu cầu đề bài.

Nếu $m < 1 \Rightarrow$ Hàm số đồng biến trên đoạn $[1;2]$.

$$\text{Khi đó: } \min_{[1;2]} y + \max_{[1;2]} y = \frac{16}{3} \Leftrightarrow y(1) + y(2) = \frac{16}{3} \Leftrightarrow \frac{m+1}{2} + \frac{m+2}{3} = \frac{16}{3} \Leftrightarrow m = 5 \text{ (loại)}.$$

Nếu $m > 1 \Rightarrow$ Hàm số nghịch biến trên đoạn $[1;2]$.

$$\text{Khi đó: } \min_{[1;2]} y + \max_{[1;2]} y = \frac{16}{3} \Leftrightarrow y(2) + y(1) = \frac{16}{3} \Leftrightarrow \frac{2+m}{3} + \frac{1+m}{2} = \frac{16}{3} \Leftrightarrow m = 5 \text{ (t/m)}$$

Câu 55. (CỤM LIÊN TRƯỜNG HẢI PHÒNG NĂM 2018-2019) Có một giá trị m_0 của tham số m để hàm số $y = x^3 + (m^2 + 1)x + m + 1$ đạt giá trị nhỏ nhất bằng 5 trên đoạn $[0;1]$. Mệnh đề nào sau đây là đúng?

- A.** $2018m_0 - m_0^2 \geq 0$. **B.** $2m_0 - 1 < 0$.
C. $6m_0 - m_0^2 < 0$. **D.** $2m_0 + 1 < 0$.

Lời giải

+ Đặt $f(x) = x^3 + (m^2 + 1)x + m + 1$.

+ Ta có: $y' = 3x^2 + m^2 + 1$. Dễ thấy rằng $y' > 0$ với mọi x, m thuộc \mathbb{R} nên hàm số đồng biến trên \mathbb{R} , suy ra hàm số đồng biến trên $[0;1]$. Vì thế $\min_{[0;1]} y = \min_{[0;1]} f(x) = f(0) = m + 1$.

+ Theo bài ra ta có: $m + 1 = 5$, suy ra $m = 4$.

+ Như vậy $m_0 = 4$ và mệnh đề đúng là $2018m_0 - m_0^2 \geq 0$.

Câu 56. (SỞ GIÁO DỤC ĐÀO TẠO VĨNH PHÚC NĂM 2018 - 2019 LẦN 01) Tính tổng tất cả các giá trị của tham số m sao cho giá trị lớn nhất của hàm số $y = |x^2 - 2x + m|$ trên đoạn $[-1;2]$ bằng 5.

- A.** -1. **B.** 2. **C.** -2. **D.** 1.

Lời giải

Ta có $y' = \frac{2x-2}{|x^2-2x+m|}$, $y' = 0 \Rightarrow x = 1$.

Do đó yêu cầu bài toán tương đương $\max\{y(-1), y(2), y(1)\} = 5$.

$$\Leftrightarrow \max\{|3+m|, |m|, |m-1|\} = 5.$$

+ Trường hợp $m \geq -1$, ta có $\max\{|3+m|, |m|, |m-1|\} = 5 \Leftrightarrow |3+m| = 5 \Rightarrow m = 2$.

+ Trường hợp $m < -1$ ta có $\max\{|3+m|, |m|, |m-1|\} = 5 \Leftrightarrow |m-1| = 5 \Rightarrow m = -4$.

Vậy tổng các giá trị m bằng -2.

Câu 57. (THCS - THPT NGUYỄN KHUYẾN NĂM 2018-2019 LẦN 01) Nếu hàm số $y = x + m + \sqrt{1-x^2}$ có giá trị lớn nhất bằng $2\sqrt{2}$ thì giá trị của m là

- A.** $\frac{\sqrt{2}}{2}$. **B.** $-\sqrt{2}$. **C.** $\sqrt{2}$. **D.** $-\frac{\sqrt{2}}{2}$.

Lời giải

Xét hàm số $y = x + m + \sqrt{1-x^2}$

Tập xác định: $D = [-1;1]$.

Ta có: $y' = 1 - \frac{x}{\sqrt{1-x^2}}$

$$y' = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} \sqrt{1-x^2} = x \\ 1-x^2 > 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 1 > x \geq 0 \\ \sqrt{1-x^2} = x \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 1 > x \geq 0 \\ 2x^2 = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 1 > x \geq 0 \\ x = \frac{1}{\sqrt{2}} \\ x = -\frac{1}{\sqrt{2}} \end{cases} \Leftrightarrow x = \frac{1}{\sqrt{2}}.$$

Ta có: $y(-1) = -1 + m$, $y(1) = 1 + m$, $y\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right) = \sqrt{2} + m$.

Do hàm số $y = x + m + \sqrt{1-x^2}$ liên tục trên $[-1;1]$ nên $\text{Max}_{y \in [-1;1]} = m + \sqrt{2}$.

Theo bài ra thì $\text{Max}_{y \in [-1;1]} = 2\sqrt{2}$, suy ra $m + \sqrt{2} = 2\sqrt{2} \Leftrightarrow m = \sqrt{2}$.

Câu 58. (THPT LÊ VĂN THỊNH BẮC NINH NĂM 2018-2019) Cho hàm số $y = \frac{x+m}{x+1}$ (m là tham số thực) thỏa mãn $\min_{[0;1]} y = 3$. Mệnh đề nào dưới đây đúng?

- A. $1 \leq m < 3$ B. $m > 6$ C. $m < 1$ **D. $3 < m \leq 6$**

Lời giải

Chọn D

Tập xác định: $D = \mathbb{R} \setminus \{-1\}$.

Với $m = 1 \Rightarrow y = 1, \forall x \in [0;1]$ thì $\min_{[0;1]} y \neq 3$.

Suy ra $m \neq 1$. Khi đó $y' = \frac{1-m}{(x+1)^2}$ không đổi dấu trên từng khoảng xác định.

TH 1: $y' > 0 \Leftrightarrow m < 1$ thì $\min_{[0;1]} y = y(0) \Rightarrow m = 3$ (loại).

TH 2: $y' < 0 \Leftrightarrow m > 1$ thì $\min_{[0;1]} y = y(1) \Rightarrow m = 5$ (thỏa mãn).

Câu 59. (CHUYÊN KHTN LẦN 2 NĂM 2018-2019) Tổng giá trị lớn nhất và giá trị nhỏ nhất của hàm số $y = \frac{x+m}{x+1}$ trên $[1;2]$ bằng 8 (m là tham số thực). Khẳng định nào sau đây đúng?

- A. $m > 10$. B. $8 < m < 10$. C. $0 < m < 4$. D. $4 < m < 8$.

Lời giải

Nếu $m = 1$ thì $y = 1$ (không thỏa mãn tổng của giá trị lớn nhất và nhỏ nhất bằng 8)

Nếu $m \neq 1$ thì hàm số đã cho liên tục trên $[1;2]$ và $y' = \frac{1-m}{(x+1)^2}$.

Khi đó đạo hàm của hàm số không đổi dấu trên đoạn $[1;2]$.

Do vậy $\min_{x \in [1;2]} y + \max_{x \in [1;2]} y = y(1) + y(2) = \frac{m+1}{2} + \frac{m+2}{3} = 8 \Leftrightarrow m = \frac{41}{5}$.

Câu 60. (THPT NGÔ GIA TỰ VINH PHÚC NĂM 2018-2019 LẦN 01) Cho hàm số $y = 2x^3 - 3x^2 - m$. Trên $[-1;1]$ hàm số có giá trị nhỏ nhất là -1 . Tính m ?

- A. $m = -6$. B. $m = -3$. **C. $m = -4$** . D. $m = -5$.

Lời giải

Chọn C

Xét $[-1;1]$ có $y' = 6x^2 - 6x$.

$$y' = 0 \Leftrightarrow 6x^2 - 6x = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = 0 \in [-1;1] \\ x = 1 \in [-1;1] \end{cases}$$

Khi đó

$$y(-1) = -5 - m; \quad y(0) = -m; \quad y(1) = -1 - m$$

Ta thấy $-5 - m < -1 - m < -m$ nên $\min_{[-1;1]} y = -5 - m$.

Theo bài ra ta có $\min_{[-1;1]} y = -1$ nên $-5 - m = -1 \Leftrightarrow m = -4$.

Câu 61. (THPT ĐÔNG SƠN THANH HÓA NĂM 2018-2019 LẦN 02) Tìm m để giá trị lớn nhất của hàm số $y = |x^3 - 3x + 2m - 1|$ trên đoạn $[0;2]$ là nhỏ nhất. Giá trị của m thuộc khoảng nào?

- A. $\left(-\frac{3}{2}; -1\right)$. B. $\left(\frac{2}{3}; 2\right)$. C. $[-1;0]$. D. $(0;1)$.

Lời giải

Xét hàm số $y = f(x) = x^3 - 3x + 2m - 1$ trên đoạn $[0;2]$.

$$\text{Ta có } f'(x) = 3x^2 - 3 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = -1 \notin [0;2] \\ x = 1 \end{cases}$$

Ta có $f(0) = 2m - 1$, $f(1) = 2m - 3$ và $f(2) = 2m + 1$

$$\text{Suy ra } \max_{[0;2]} |f(x)| = \max\{|2m - 1|; |2m - 3|; |2m + 1|\} = \max\{|2m - 3|; |2m + 1|\} = P.$$

Trường hợp 1: Xét $|2m - 3| \geq |2m + 1| \Leftrightarrow -4(4m - 2) \geq 0 \Leftrightarrow m \leq \frac{1}{2}$.

Khi đó $P = |2m - 3| \geq 2, \forall m \leq \frac{1}{2}$. Suy ra $P_{\min} = 2 \Leftrightarrow m = \frac{1}{2}$.

Trường hợp 2: Xét $|2m - 3| < |2m + 1| \Leftrightarrow -4(4m - 2) < 0 \Leftrightarrow m > \frac{1}{2}$.

Khi đó $P = |2m + 1| > 2, \forall m > \frac{1}{2}$. Suy ra P_{\min} không tồn tại.

Vậy $m = \frac{1}{2}$.

Câu 62. (HỌC MÃI NĂM 2018-2019-LẦN 02) Biết S là tập giá trị của m để tổng giá trị lớn nhất và giá trị nhỏ nhất của hàm số $y = x^4 - m^2x^3 - 2x^2 - m$ trên đoạn $[0;1]$ bằng -16 . Tính tích các phần tử của S .

- A. 2. B. -2. C. -15. D. -17.

Lời giải

TXĐ: $D = \mathbb{R}$.

Ta có: $y' = 4x^3 - 3m^2x^2 - 4x$

$$y' = 0 \Leftrightarrow 4x^3 - 3m^2x^2 - 4x = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = 0 \\ 4x^2 - 3m^2x - 4 = 0 \quad (\Delta = 9m^2 + 64) \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x=0 \\ x = \frac{3m^2 + \sqrt{9m^4 + 64}}{8} > 1 \\ x = \frac{3m^2 - \sqrt{9m^4 + 64}}{8} < 0 \end{cases}$$

Nên hàm số đơn điệu trên $(0;1)$.

Tổng giá trị lớn nhất và giá trị nhỏ nhất của hàm số trên đoạn $[0;1]$ bằng -16 nên

$$y(0) + y(1) = -16 \Leftrightarrow -m + (-m^2 - m - 1) = -16 \Leftrightarrow -m^2 - 2m + 15 = 0.$$

Vậy $m_1.m_2 = -15$.

Câu 63. (CHUYÊN BẮC NINH NĂM 2018-2019 LẦN 03) Gọi A, B lần lượt là giá trị nhỏ nhất, giá trị lớn nhất của hàm số $y = \frac{x+m^2+m}{x-1}$ trên đoạn $[2;3]$. Tìm tất cả các giá trị thực của tham số m để

$$A+B = \frac{13}{2}.$$

A. $m=1; m=-2$.

B. $m=-2$.

C. $m=\pm 2$.

D. $m=-1; m=2$.

Lời giải

Xét hàm số $y = \frac{x+m^2+m}{x-1}$ trên đoạn $[2;3]$.

$$y' = \frac{-m^2 - m - 1}{(x-1)^2} < 0 \quad \forall x \in [2;3] \Rightarrow A = f(3) = \frac{m^2 + m + 3}{2}, B = f(2) = \frac{m^2 + m + 2}{1}.$$

$$A+B = \frac{13}{2} \Leftrightarrow \frac{m^2 + m + 3}{2} + \frac{m^2 + m + 2}{1} = \frac{13}{2} \Leftrightarrow \begin{cases} m=1 \\ m=-2 \end{cases}.$$

Câu 64. (THPT AN LÃO HẢI PHÒNG NĂM 2018-2019 LẦN 02) Tìm tất cả giá trị thực của tham số m để hàm số $y = \frac{x^2 + mx + 1}{x+m}$ liên tục và đạt giá trị nhỏ nhất trên đoạn $[0;2]$ tại một điểm $x_0 \in (0;2)$

A. $0 < m < 1$

B. $m > 1$

C. $m > 2$

D. $-1 < m < 1$

Lời giải

Chọn A

Tập xác định: $D = \mathbb{R} \setminus \{-m\}$. Hàm số liên tục trên $[0;2] \Leftrightarrow \begin{cases} -m < 0 \\ -m > 2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m > 0 \\ m < -2 \end{cases}$

$$\text{Ta có } y' = \frac{x^2 + 2mx + m^2 - 1}{(x+m)^2} = \frac{(x+m)^2 - 1}{(x+m)^2}. \text{ Cho } y' = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x_1 = -m - 1 \\ x_2 = -m + 1 \end{cases}.$$

Ta có bảng biến thiên

x	$-\infty$	x_1	$-m$	0	x_2	2	$+\infty$	
y'	+		0	-	-		0	+
y	↘		↗	↘	↗		↘	

Hàm số đạt giá trị nhỏ nhất tại $x_0 \in (0;2)$ nên $0 < -m+1 < 2 \Leftrightarrow -1 < m < 1$

So với điều kiện hàm số liên tục trên đoạn $[0;2]$. Ta có $0 < m < 1$.

CÓ THỂ GIẢI NHƯ SAU:

Điều kiện xác định $x \neq -m$

Hàm số liên tục trên đoạn $[0;2]$ nên $-m \notin [0;2] \Rightarrow \begin{cases} -m < 0 \\ -m > 2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m > 0 \\ m < -2 \end{cases} (*)$

$$y' = \frac{x^2 + 2mx + m^2 - 1}{(x+m)^2} = \frac{(x+m)^2 - 1}{(x+m)^2}$$

$$y' = 0 \text{ có hai nghiệm là } \begin{cases} x_1 = -m+1 \\ x_2 = -m-1 \end{cases}$$

$x_1 - x_2 = 2$ nên chỉ có nhiều nhất một nghiệm thuộc $(0;2)$

Ta thấy $-m+1 > -m-1, \forall m$ và do đó để hàm số liên tục và đạt giá trị nhỏ nhất trên $[0;2]$ tại một điểm $x_0 \in (0;2)$ thì $0 < -m+1 < 2 \Leftrightarrow -1 < m < 1 (**)$

Từ (*),(**) ta có $0 < m < 1$

Câu 65. (THPT CHUYÊN VĨNH PHÚC LẦN 02 NĂM 2018-2019) Gọi S là tập hợp tất cả các giá trị thực của tham số m sao cho giá trị lớn nhất của hàm số $y = \left| \frac{x^2 + mx + m}{x+1} \right|$ trên $[1;2]$ bằng 2. Số phần tử của tập S

A. 3.

B. 1.

C. 4.

D. 2!

Lời giải

Chọn D

$$\text{Xét } y = \frac{x^2 + mx + m}{x+1}. \text{ Ta có: } f'(x) = \frac{x^2 + 2x}{(x+1)^2}, f'(x) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = 0 \notin [1;2] \\ x = -2 \notin [1;2] \end{cases}$$

$$\text{Mà } f(1) = \frac{2m+1}{2}, f(2) = \frac{3m+4}{3} \Rightarrow \max_{x \in [1;2]} y = \left\{ \left| \frac{2m+1}{2} \right|, \left| \frac{3m+4}{3} \right| \right\}.$$

$$\text{Trường hợp 1: } \max_{x \in [1;2]} y = \left| \frac{2m+1}{2} \right| = 2 \Rightarrow \begin{cases} m = \frac{3}{2} \\ m = -\frac{5}{2} \end{cases}.$$

• Với $m = \frac{3}{2} \Rightarrow \left| \frac{3m+4}{3} \right| = \frac{17}{6} > 2$ (loại)

• Với $m = -\frac{5}{2} \Rightarrow \left| \frac{3m+4}{3} \right| = \frac{7}{6} < 2$ (thỏa mãn)

Trường hợp 2: $\max_{x \in [1;2]} y = \left| \frac{3m+4}{3} \right| = 2 \Rightarrow \begin{cases} 3m+4=6 \\ 3m+4=-6 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m = \frac{2}{3} \\ m = -\frac{10}{3} \end{cases}$

• Với $m = \frac{2}{3} \Rightarrow \left| \frac{2m+1}{2} \right| = \frac{7}{6} < 2$ (thỏa mãn)

• Với $m = -\frac{10}{3} \Rightarrow \left| \frac{2m+1}{2} \right| = \frac{17}{6} > 2$ (loại)

Vậy có 2 giá trị của m thỏa mãn.

Câu 66. (THPT MINH CHÂU HÙNG YÊN NĂM 2018 – 2019) Tìm m để giá trị nhỏ nhất của hàm số

$f(x) = \frac{x-m^2+m}{x+1}$ trên đoạn $(0;1)$ bằng -2

A. $\begin{cases} m=1 \\ m=2 \end{cases}$

B. $\begin{cases} m=1 \\ m=-2 \end{cases}$

C. $\begin{cases} m=-1 \\ m=2 \end{cases}$

D. $m = \frac{1 \pm \sqrt{21}}{2}$

Lời giải

Chọn C

Ta có: $y' = \frac{-m^2+m+1}{(x+1)^2} < 0, \forall m \in \mathbb{R}$

\Rightarrow Hs luôn nghịch biến trên $[0;1]$

$\Rightarrow \underset{[0;1]}{\text{Max}} f(x) = f(0) \Leftrightarrow -m^2+m = -2 \Leftrightarrow \begin{cases} m=2 \\ m=-1 \end{cases}$

Câu 67. (THPT BẠCH ĐẰNG QUẢNG NINH NĂM 2018-2019) Cho hàm số $y = \frac{1-m \sin x}{\cos x + 2}$. Có bao

nhieu giá trị nguyên của tham số m thuộc đoạn $[0;10]$ để giá trị nhỏ nhất của hàm số nhỏ hơn -2 ?

A. 1.

B. 9.

C. 3.

D. 6.

Lời giải

Tập xác định: $D = \mathbb{R}$.

Ta có: $y = \frac{1-m \sin x}{\cos x + 2} \Leftrightarrow y \cos x + m \sin x = 1 - 2y$.

Phương trình có nghiệm khi và chỉ khi: $y^2 + m^2 \geq 1 - 4y + 4y^2 \Leftrightarrow 3y^2 - 4y + 1 - m^2 \leq 0$

$\Leftrightarrow \frac{2 - \sqrt{1+3m^2}}{3} \leq y \leq \frac{2 + \sqrt{1+3m^2}}{3}$.

Theo đề bài, ta có: $\begin{cases} \min_{x \in \mathbb{R}} y = \frac{2 - \sqrt{1+3m^2}}{3} < -2 \\ m \in [0;10] \\ m \in \mathbb{Z} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \sqrt{1+3m^2} > 8 \\ m \in [0;10] \\ m \in \mathbb{Z} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 3m^2 > 63 \\ m \in [0;10] \\ m \in \mathbb{Z} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m^2 > 21 \\ m \in [0;10] \\ m \in \mathbb{Z} \end{cases}$

$$\Leftrightarrow m \in \{5, 6, 7, 8, 9, 10\}.$$

Vậy có 6 giá trị nguyên của tham số m thỏa yêu cầu bài toán.

Câu 68. (ĐỀ HỌC SINH GIỎI TỈNH BẮC NINH NĂM 2018-2019) Xét hàm số $f(x) = |x^2 + ax + b|$, với a, b là tham số. Gọi M là giá trị lớn nhất của hàm số trên $[-1; 3]$. Khi M nhận giá trị nhỏ nhất có thể được, tính $a + 2b$.

A. 2. B. 4. C. -4. D. 3.

Lời giải

Xét hàm số $f(x) = |x^2 + ax + b|$. Theo đề bài, M là giá trị lớn nhất của hàm số trên $[-1; 3]$.

$$\text{Suy ra } \begin{cases} M \geq f(-1) \\ M \geq f(3) \\ M \geq f(1) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} M \geq |1 - a + b| \\ M \geq |9 + 3a + b| \\ M \geq |1 + a + b| \end{cases} \Rightarrow 4M \geq |1 - a + b| + |9 + 3a + b| + 2|-1 - a - b|$$

$$\geq |1 - a + b + 9 + 3a + b + 2(-1 - a - b)| \Rightarrow 4M \geq 8 \Rightarrow M \geq 2.$$

Nếu $M = 2$ thì điều kiện cần là $|1 - a + b| = |9 + 3a + b| = |-1 - a - b| = 2$ và $1 - a + b, 9 + 3a + b,$

$$-1 - a - b \text{ cùng dấu} \Leftrightarrow \begin{cases} 1 - a + b = 9 + 3a + b = -1 - a - b = 2 \\ 1 - a + b = 9 + 3a + b = -1 - a - b = -2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = -2 \\ b = -1 \end{cases}$$

Ngược lại, khi $\begin{cases} a = -2 \\ b = -1 \end{cases}$ ta có, hàm số $f(x) = |x^2 - 2x - 1|$ trên $[-1; 3]$.

Xét hàm số $g(x) = x^2 - 2x - 1$ xác định và liên tục trên $[-1; 3]$.

$$g'(x) = 2x - 2; \quad g'(x) = 0 \Leftrightarrow x = 1 \in [-1; 3]$$

M là giá trị lớn nhất của hàm số $f(x)$ trên $[-1; 3] \Rightarrow M = \max \{|g(-1)|; |g(3)|; |g(1)|\} = 2$.

Vậy $\begin{cases} a = -2 \\ b = -1 \end{cases}$. Ta có: $a + 2b = -4$.

Câu 69. (ĐỀ HỌC SINH GIỎI TỈNH BẮC NINH NĂM 2018-2019) Cho hàm số $y = ax^3 + cx + d$, $a \neq 0$ có $\min_{x \in (-\infty; 0)} f(x) = f(-2)$. Giá trị lớn nhất của hàm số $y = f(x)$ trên đoạn $[1; 3]$ bằng

A. $d - 11a$. B. $d - 16a$. C. $d + 2a$. D. $d + 8a$.

Lời giải

Vì $y = ax^3 + cx + d$, $a \neq 0$ là hàm số bậc ba và có $\min_{x \in (-\infty; 0)} f(x) = f(-2)$ nên $a < 0$ và $y' = 0$ có hai nghiệm phân biệt.

Ta có $y' = 3ax^2 + c = 0$ có hai nghiệm phân biệt $\Leftrightarrow ac < 0$.

Vậy với $a < 0, c > 0$ thì $y' = 0$ có hai nghiệm đối nhau $x = \pm \sqrt{-\frac{c}{3a}}$

$$\text{Từ đó suy ra } \min_{x \in (-\infty; 0)} f(x) = f\left(-\sqrt{-\frac{c}{3a}}\right) \Leftrightarrow -\sqrt{-\frac{c}{3a}} = -2 \Leftrightarrow \sqrt{-\frac{c}{3a}} = 2 \Leftrightarrow c = -12a$$

Ta có bảng biến thiên

x	$-\infty$	-2	0	1	2	3	$+\infty$
y'		$-$	0	$+$	0	$-$	
y	$+\infty$				$f(2)$		$-\infty$

$f(-2) \swarrow \quad \searrow$
 $f(2)$

Ta suy ra $\max_{x \in [1;3]} f(x) = f(2) = 8a + 2c + d = -16a + d$.

Câu 70. (CHUYÊN THÁI BÌNH NĂM 2018-2019 LẦN 03) Gọi S là tập hợp các giá trị của tham số m để giá trị lớn nhất của hàm số $y = \left| \frac{x^2 - mx + 2m}{x - 2} \right|$ trên đoạn $[-1;1]$ bằng 3. Tính tổng tất cả các phần tử của S .

- A. $-\frac{8}{3}$. B. 5. C. $\frac{5}{3}$. D. -1.

Lời giải

Xét hàm số $y = f(x) = \frac{x^2 - mx + 2m}{x - 2}$ trên $[-1;1]$ có $f'(x) = 1 - \frac{4}{(x - 2)^2}$;

$$f'(x) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = 0 \\ x = 4 \notin [-1;1] \end{cases}; f(-1) = \frac{3m+1}{-3}; f(0) = -m; f(1) = \frac{m+1}{-1}.$$

Bảng biến thiên

x	-1	0	1
$f'(x)$	$+$	0	$-$
$f(x)$	$f(-1)$	$f(0)$	$f(1)$

$f(-1) \swarrow \quad \searrow$
 $f(0)$

Trường hợp 1. $f(0) \leq 0 \Leftrightarrow m \geq 0$. Khi đó

$$3 = \max_{[-1;1]} |f(x)| = \max \{ |f(-1)|; |f(1)| \} \Leftrightarrow 3 = \max \left\{ \frac{3m+1}{3}; m+1 \right\} \Leftrightarrow m+1 = 3 \Leftrightarrow m = 2.$$

Trường hợp 2. $f(0) > 0 \Leftrightarrow m < 0$.

Khả năng 1. $\begin{cases} f(-1) \geq 0 \\ f(1) \geq 0 \end{cases} \Leftrightarrow m \leq -1$. Khi đó $3 = \max_{[-1;1]} |f(x)| = f(0) \Leftrightarrow m = -3$.

Khả năng 2. $-1 < m \leq -\frac{1}{3}$. Khi đó $\begin{cases} f(-1) \geq 0 \\ f(1) < 0 \end{cases}$. $3 = \max_{[-1;1]} |f(x)| = \max \{ f(0); |f(1)| \}$

$\Leftrightarrow 3 = \max \{-m; m+1\}$: Trường hợp này vô nghiệm.

Khả năng 3. $-\frac{1}{3} < m < 0$. Khi đó $3 = \max_{[-1;1]} |f(x)| = \max \{ f(0); |f(1)|; |f(-1)| \}$: Vô nghiệm.

Vậy có hai giá trị thỏa mãn là $m_1 = -3, m_2 = 2$. Do đó tổng tất cả các phần tử của S là -1.

Câu 71. (GKI THPT NGHĨA HƯNG NAM ĐỊNH NĂM 2018-2019) Tìm tất cả các giá trị của tham số m để hàm số $y = \frac{x+m}{x^2+x+1}$ có giá trị lớn nhất trên \mathbb{R} nhỏ hơn hoặc bằng 1.

- A. $m \leq 1$. B. $m \geq 1$. C. $m \geq -1$. D. $m \leq -1$.

Lời giải

Chọn A

+ TXĐ: $D = \mathbb{R}$.

+ $\lim_{x \rightarrow \infty} y = 0$

$$+ y' = \frac{-x^2 - 2mx + 1 - m}{(x^2 + x + 1)^2}.$$

$$y' = 0 \Leftrightarrow -x^2 - 2mx + 1 - m = 0 \quad (*)$$

$\Delta_{(*)} = m^2 - m + 1 > 0, \forall m \in \mathbb{R}$ nên (*) có 2 nghiệm phân biệt $x_1 < x_2, \forall m \in \mathbb{R}$

+ BBT:

x	$-\infty$	x_1	x_2	$+\infty$
y'		-	+	-
y	0	$f(x_1)$	$f(x_2)$	0

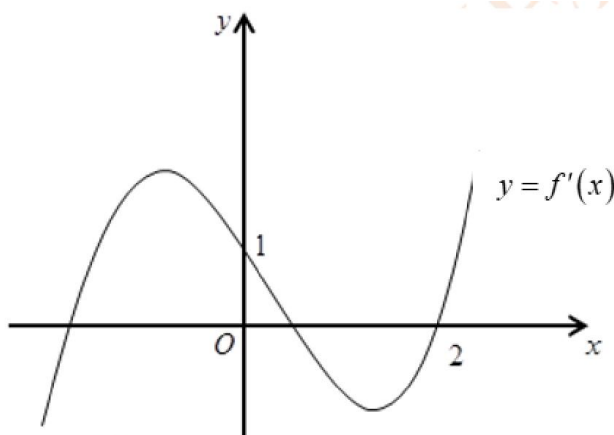
Vậy hàm số đạt giá trị lớn nhất là $f(x_2) = \frac{1}{2x_2 + 1}$ với $x_2 = -m + \sqrt{m^2 - m + 1}$

$$YCBT \Leftrightarrow \frac{1}{-2m + 2\sqrt{m^2 - m + 1} + 1} \leq 1 \Leftrightarrow 1 - 2m + 2\sqrt{m^2 - m + 1} \geq 1 \quad (\text{vì } f(x_2) > 0 \Rightarrow 2x_2 + 1 > 0)$$

$$\Leftrightarrow \sqrt{m^2 - m + 1} \geq m \Leftrightarrow \begin{cases} m < 0 \\ m \geq 0 \\ m^2 - m + 1 \geq m^2 \end{cases} \Leftrightarrow m \leq 1$$

Dạng 6. Bài toán GTLN-GTNN liên quan đến đồ thị đạo hàm

Câu 72. (Mã 102 - BGD - 2019) Cho hàm số $f(x)$, hàm số $y = f'(x)$ liên tục trên \mathbb{R} và có đồ thị như hình vẽ.



Bất phương trình $f(x) > x + m$ (m là tham số thực) nghiệm đúng với mọi $x \in (0; 2)$ khi và chỉ khi

- A.** $m \leq f(0)$. **B.** $m < f(0)$. **C.** $m \leq f(2) - 2$. **D.** $m < f(2) - 2$.

Lời giải

Chọn C

Xét bất phương trình $f(x) > x + m \Leftrightarrow m < f(x) - x$.

Xét hàm số $g(x) = f(x) - x$ với $x \in (0; 2)$. Ta có $g'(x) = f'(x) - 1$.

$g'(x) = 0 \Leftrightarrow f'(x) = 1$. Từ đồ thị ta thấy đường thẳng $y = 1$ không cắt đồ thị $y = f'(x)$ tại bất kỳ điểm nào có hoành độ thuộc khoảng $(0; 2)$ nên phương trình $f'(x) = 1$ vô nghiệm với $x \in (0; 2)$.

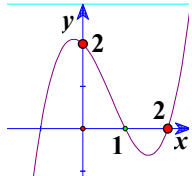
Ta có bảng biến thiên như sau:

x	0	2
$g'(x)$	-	
$g(x)$	$g(0)$	$g(2)$

(do $f'(x) < 1$ với $x \in (0; 2)$).

Từ bảng biến thiên ta thấy để $m < g(x)$ với $x \in (0; 2) \Leftrightarrow m \leq g(2) \Leftrightarrow m \leq f(2) - 2$.

Câu 73. (Mã 103 - BGD - 2019) Cho hàm số $y = f(x)$, hàm số $y = f'(x)$ liên tục trên \mathbb{R} và có đồ thị như hình vẽ bên. Bất phương trình $f(x) < 2x + m$ (m là tham số thực) nghiệm đúng với mọi $x \in (0; 2)$ khi và chỉ khi



A. $m \geq f(0)$.

B. $m \geq f(2) - 4$.

C. $m > f(0)$.

D. $m > f(2) - 4$.

Lời giải

Chọn A

$$f(x) < 2x + m$$

$$\Leftrightarrow m > f(x) - 2x$$

$$\Leftrightarrow m \geq \max_{(0;2)} [f(x) - 2x]$$

Ta tìm $\max_{[0;2]} [f(x) - 2x]$

Đặt $g(x) = f(x) - 2x$

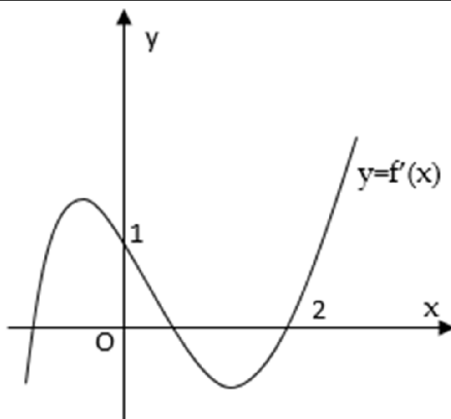
$$g'(x) = f'(x) - 2$$

$$\forall x \in [0; 2], f'(x) - 2 < 0$$

$$\Rightarrow \max_{[0;2]} g(x) = g(0) = f(0)$$

Vậy $m \geq f(0)$

Câu 74. (Mã đề 101 - BGD - 2019) Cho hàm số $y = f(x)$, hàm số $y = f'(x)$ liên tục trên \mathbb{R} và có đồ thị như hình vẽ bên dưới



Bất phương trình $f(x) < x + m$ (m là tham số thực) nghiệm đúng với mọi $x \in (0; 2)$ khi và chỉ khi

A. $m > f(2) - 2$. **B.** $m > f(0)$. **C.** $m \geq f(2) - 2$. **D.** $m \geq f(0)$.

Lời giải

Chọn D

$$f(x) < x + m \Leftrightarrow f(x) - x < m.$$

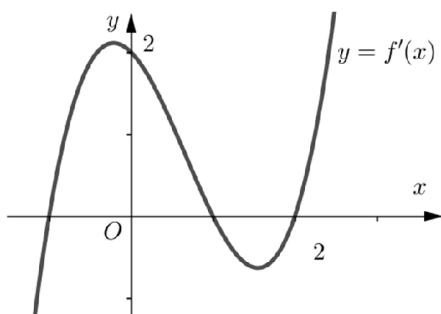
Đặt $g(x) = f(x) - x$ xét trên khoảng $(0; 2)$.

$$g'(x) = f'(x) - 1.$$

Từ đồ thị ta thấy $g'(x) = f'(x) - 1 < 0$ với mọi $x \in (0; 2)$. Suy ra hàm số $g(x) = f(x) - x$ luôn nghịch biến trên khoảng $(0; 2)$.

Bất phương trình $f(x) < x + m$ (m là tham số thực) nghiệm đúng với mọi $x \in (0; 2)$ khi và chỉ khi $m \geq \lim_{x \rightarrow 0} g(x) = f(0)$.

Câu 75. (Mã đề 104 - BGD - 2019) Cho hàm số $f(x)$, hàm số $f'(x)$ liên tục trên \mathbb{R} và có đồ thị như hình vẽ.



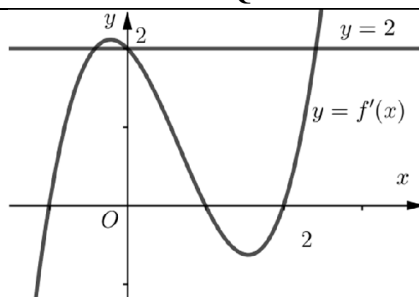
Bất phương trình $f(x) > 2x + m$ (m là tham số thực) nghiệm đúng với mọi $x \in (0; 2)$ khi và chỉ khi

A. $m < f(2) - 4$. **B.** $m \leq f(2) - 4$. **C.** $m \leq f(0)$. **D.** $m < f(0)$.

Lời giải

Chọn E

Hàm số $g(x) = f(x) - 2x$ nghịch biến trên khoảng $(0; 2)$ vì $g'(x) = f'(x) - 2 < 0, \forall x \in (0; 2)$ (quan sát trên khoảng $(0; 2)$, đồ thị hàm số $f'(x)$ nằm dưới đường thẳng $y = 2$).

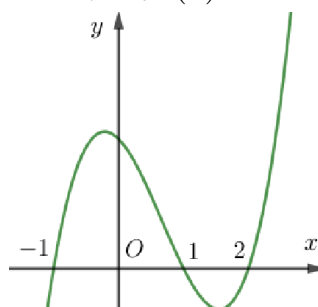


Suy ra $g(2) < g(x) < g(0), \forall x \in (0; 2)$.

Bất phương trình đã cho nghiệm đúng với mọi $x \in (0; 2)$ khi và chỉ khi $m < g(x), \forall x \in (0; 2)$

$$\Leftrightarrow m \leq g(2) \Leftrightarrow m \leq f(2) - 4.$$

Câu 76. (THCS - THPT NGUYỄN KHUYẾN NĂM 2018-2019 LẦN 01) Cho hàm số $y = f(x)$ xác định và liên tục trên \mathbb{R} , đồ thị của hàm số $y = f'(x)$ như hình vẽ.



Giá trị lớn nhất của hàm số $y = f(x)$ trên đoạn $[-1; 2]$ là

A. $f(1)$.

B. $f(-1)$.

C. $f(2)$.

D. $f(0)$.

Lời giải

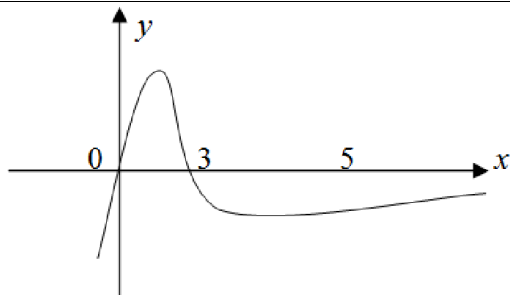
$$f'(x) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = -1 \\ x = 1 \\ x = 2 \end{cases}$$

Từ đồ thị hàm $y = f'(x)$ ta có bảng biến thiên

x	$-\infty$	-1	1	2	$+\infty$
y'	$-$	0	$+$	0	$-$
y	$+\infty$	$f(-1)$	$f(1)$	$f(2)$	$+\infty$

Từ đó suy ra giá trị lớn nhất của hàm số trên $[-1; 2]$ là $f(1)$.

Câu 77. (THPT THIỆU HÓA – THANH HÓA NĂM 2018-2019 LẦN 01) Cho hàm số $f(x)$ có đạo hàm là $f'(x)$. Đồ thị của hàm số $y = f'(x)$ được cho như hình vẽ bên. Biết rằng $f(0) + f(1) - 2f(3) = f(5) - f(4)$. Tìm giá trị nhỏ nhất m và giá trị lớn nhất M của $f(x)$ trên đoạn $[0; 5]$.



A. $m = f(5), M = f(3)$ **B.** $m = f(5), M = f(1)$

C. $m = f(0), M = f(3)$ **D.** $m = f(1), M = f(3)$

Lời giải

Chọn A

Từ đồ thị ta có bảng biến thiên của $f(x)$ trên đoạn $[0;5]$

x	0	3	5	
$f'(x)$	0	+	0	-
$f(x)$	$f(0)$	$f(3)$	$f(5)$	

$\Rightarrow M = f(3)$ và $f(1) < f(3), f(4) < f(3)$

$f(5) - f(0) = f(1) - f(3) + f(4) - f(3) < 0 \Rightarrow f(5) < f(0) \Rightarrow m = f(5).$

Câu 78. (ĐỀ 04 VTED NĂM 2018-2019) Cho hàm số $y = f(x)$. Hàm số $y = f'(x)$ có bảng biến thiên như sau:

Bất phương trình $f(e^x) < e^x + m$ nghiệm đúng với mọi $x \in (-1;1)$ khi và chỉ khi

x	$-\infty$	-2	3	$+\infty$
$f'(x)$	$+\infty$	-3	1	$-\infty$

A. $m \geq f\left(\frac{1}{e}\right) - \frac{1}{e}$

B. $m > f(-1) - \frac{1}{e}$

C. $m \geq f(-1) - \frac{1}{e}$

D. $m > f\left(\frac{1}{e}\right) - \frac{1}{e}$

Lời giải

Chọn A

Ta có $f(e^x) < e^x + m \Leftrightarrow f(e^x) - e^x < m, x \in (-1;1).$

Đặt $g(x) = f(e^x) - e^x$ khi đó $m > g(x) \forall x \in (-1;1) \Leftrightarrow m \geq \text{Max}_{[-1;1]} g(x).$

Xét $g(x) = f(e^x) - e^x$ trên $[-1;1].$

Có $g'(x) = e^x f'(e^x) - e^x = e^x (f'(e^x) - 1) < 0, \forall x \in [-1;1]$ (Suy ra từ bảng biến thiên).

Do đó $\text{Max}_{[-1;1]} g(x) = g(-1) = f\left(\frac{1}{e}\right) - \frac{1}{e}.$

Vậy $m \geq \max_{[-1;1]} g(x) = g(-1) = f\left(\frac{1}{e}\right) - \frac{1}{e}$ là giá trị cần tìm.

Câu 79. (CHUYÊN LÊ HỒNG PHONG NAM ĐỊNH LẦN 1 NĂM 2018-2019) Cho hàm số $y = f(x)$ có bảng biến thiên như hình dưới đây. Tìm giá trị lớn nhất của hàm số $g(x) = f(4x - x^2) + \frac{1}{3}x^3 - 3x^2 + 8x + \frac{1}{3}$ trên đoạn $[1;3]$.

x	$-\infty$	0	4	$+\infty$			
$f'(x)$		-	0	+	0	-	
$f(x)$	$+\infty$		-3		5		$-\infty$

- A. 15. B. $\frac{25}{3}$. C. $\frac{19}{3}$. D. 12.

Lời giải

$$g'(x) = (4 - 2x)f'(4x - x^2) + x^2 - 6x + 8 = (2 - x)[2f'(4x - x^2) + 4 - x].$$

Với $x \in [1;3]$ thì $4 - x > 0$; $3 \leq 4x - x^2 \leq 4$ nên $f'(4x - x^2) > 0$.

Suy ra $2f'(4x - x^2) + 4 - x > 0, \forall x \in [1;3]$.

Bảng biến thiên

x	1	2	3		
g'		+	0	-	
g	$g(1)$		$g(2)$		$g(3)$

Suy ra $\max_{[1;3]} g(x) = g(2) = f(4) + 7 = 12$.

Câu 80. (THPT NGHĨA HƯNG ND- GK2 - 2018 - 2019) Cho hàm số $y = f(x)$. Hàm số $y = f'(x)$ có bảng biến thiên như sau

x	$-\infty$	0	$\frac{\pi}{2}$	$+\infty$			
$f'(x)$	$+\infty$		1		6		$-\infty$

Bất phương trình $f(x) > 2^{\cos x} + 3m$ đúng với mọi $x \in \left(0; \frac{\pi}{2}\right)$ khi và chỉ khi

- A. $m \leq \frac{1}{3}[f(0) - 2]$. B. $m < \frac{1}{3}[f(0) - 2]$. C. $m \leq \frac{1}{3}\left[f\left(\frac{\pi}{2}\right) - 1\right]$. D. $m < \frac{1}{3}\left[f\left(\frac{\pi}{2}\right) - 1\right]$.

Lời giải

Ta có $f(x) > 2^{\cos x} + 3m \forall x \in \left(0; \frac{\pi}{2}\right) \Leftrightarrow f(x) - 2^{\cos x} > 3m \forall x \in \left(0; \frac{\pi}{2}\right)$.

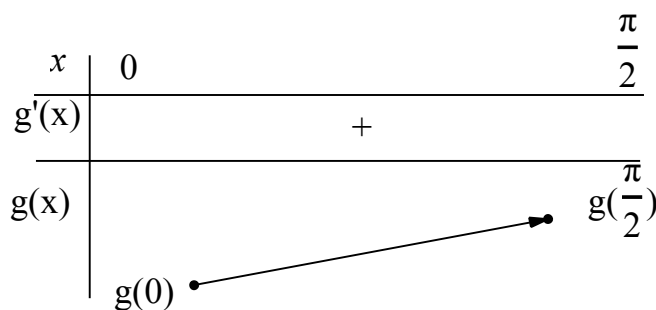
Xét hàm $g(x) = f(x) - 2^{\cos x}$ trên $\left(0; \frac{\pi}{2}\right)$.

Ta có $g'(x) = f'(x) + 2^{\cos x} \sin x \cdot \ln 2$

Vì $f'(x) \geq 1 \quad \forall x \in \left(0; \frac{\pi}{2}\right)$; $\sin x > 0 \quad \forall x \in \left(0; \frac{\pi}{2}\right) \Rightarrow 2^{\cos x} \sin x \cdot \ln 2 > 0 \quad \forall x \in \left(0; \frac{\pi}{2}\right)$ nên ta suy ra

$g'(x) = f'(x) + 2^{\cos x} \sin x \cdot \ln 2 > 0 \quad \forall x \in \left(0; \frac{\pi}{2}\right)$.

Vậy ta có bảng biến thiên



Từ bảng biến thiên ta có ycbt $\Leftrightarrow g(0) \geq 3m \Leftrightarrow 3m \leq f(0) - 2 \Leftrightarrow m \leq \frac{1}{3}[f(0) - 2]$.

Câu 81. (Đề minh họa 2019) Cho hàm số $y = f(x)$. Hàm số $y = f'(x)$ có bảng biến thiên như sau:

Bất phương trình $f(e^x) < e^x + m$ nghiệm đúng với mọi $x \in (-1; 1)$ khi và chỉ khi

x	$-\infty$	-2	3	$+\infty$
$f'(x)$	$+\infty$	-3	1	$-\infty$

A. $m \geq f\left(\frac{1}{e}\right) - \frac{1}{e}$

B. $m > f(-1) - \frac{1}{e}$

C. $m \geq f(-1) - \frac{1}{e}$

D. $m > f\left(\frac{1}{e}\right) - \frac{1}{e}$

Lời giải

Chọn A

Ta có $f(e^x) < e^x + m \Leftrightarrow f(e^x) - e^x < m, x \in (-1; 1)$.

Đặt $g(x) = f(e^x) - e^x$ khi đó $m > g(x) \forall x \in (-1; 1) \Leftrightarrow m \geq \text{Max}_{[-1; 1]} g(x)$.

Xét $g(x) = f(e^x) - e^x$ trên $[-1; 1]$.

Có $g'(x) = e^x f'(e^x) - e^x = e^x (f'(e^x) - 1) < 0, \forall x \in [-1; 1]$ (Suy ra từ bảng biến thiên).

Do đó $\text{Max}_{[-1; 1]} g(x) = g(-1) = f\left(\frac{1}{e}\right) - \frac{1}{e}$.

Vậy $m \geq \text{Max}_{[-1; 1]} g(x) = g(-1) = f\left(\frac{1}{e}\right) - \frac{1}{e}$ là giá trị cần tìm.

Câu 82. (THPT NGÔ SĨ LIÊN BẮC GIANG NĂM 2018-2019 LẦN 01) Cho hàm số $f(x)$ có bảng biến thiên như sau:

x	-1	0	2	3
$f(x)$	$\frac{3}{2}$	2	3	1

Gọi S là tập hợp các số nguyên dương m để bất phương trình $f(x) \geq m(x^3 - 3x^2 + 5)$ có nghiệm thuộc đoạn $[-1; 3]$. Số phần tử của S là

- A. 3 **B. Vô số** C. 2 D. 0

Lời giải

Chọn B

Gọi $g(x) = x^3 - 3x^2 + 5$ trên đoạn $[-1; 3]$

$$g'(x) = 0 \Leftrightarrow 3x^2 - 6x = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = 0 \\ x = 2 \end{cases}$$

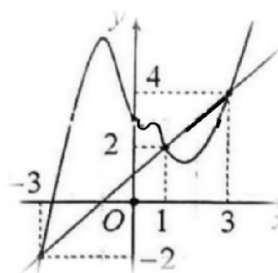
$$g(-1) = 1; g(0) = 5; g(2) = 1; g(3) = 5 \Rightarrow 1 \leq g(x) \leq 5, \forall x \in [-1; 3]$$

$$f(x) \geq m(x^3 - 3x^2 + 5), \forall x \in [-1; 3] \Leftrightarrow m \leq \frac{f(x)}{g(x)}, \forall x \in [-1; 3] \Leftrightarrow m \leq \min_{[-1; 3]} \frac{f(x)}{g(x)}$$

Vì hàm số $f(x), g(x)$ liên tục trên đoạn $[-1; 3]$ suy ra tồn tại giá trị nhỏ nhất của hàm số $\frac{f(x)}{g(x)}$ trên đoạn $[-1; 3]$

$$\text{Suy ra } m \in \left(-\infty; \min_{[-1; 3]} \frac{f(x)}{g(x)} \right] \Rightarrow \text{Số phần tử của tập hợp } S \text{ là vô số}$$

Câu 83. (CỤM LIÊN TRƯỜNG HẢI PHÒNG NĂM 2018-2019 LẦN 01) Cho hàm số $y = f(x)$ liên tục trên \mathbb{R} . Đồ thị của hàm số $y = f'(x)$ như hình bên. Đặt $g(x) = 2f(x) - (x+1)^2$. Mệnh đề dưới đây đúng.



- A. $\max_{[-3; 3]} g(x) = g(3)$. B. $\min_{[-3; 3]} g(x) = g(1)$. C. $\max_{[3; 3]} g(x) = g(0)$. **D. $\max_{[-3; 3]} g(x) = g(1)$.**

Lời giải

Chọn D

$$g(x) = 2f(x) - (x+1)^2 \Rightarrow g'(x) = 2f'(x) - 2(x+1)$$

Dựa vào đồ thị ta thấy

$$g'(x) = 0 \Leftrightarrow f'(x) = x + 1 \Leftrightarrow \begin{cases} x = -3 \\ x = 1 \\ x = 3 \end{cases}$$

Và

với $x \in (-\infty; -3)$: $f'(x) < x + 1 \Rightarrow g'(x) < 0$

với $x \in (-3; 1)$: $f'(x) > x + 1 \Rightarrow g'(x) > 0$,

với $x \in (1; 3)$: $f'(x) < x + 1 \Rightarrow g'(x) < 0$

với $x \in (3; +\infty)$: $f'(x) > x + 1 \Rightarrow g'(x) > 0$

Bảng biến thiên

x	$-\infty$	-3	1	3	$+\infty$
$g'(x)$	-	0 +	0 -	0 +	
$g(x)$					

Dựa vào bảng biến thiên suy ra $\max_{[-3;3]} g(x) = g(1)$.

Câu 84. (THPT CHUYÊN VINH PHÚC NĂM 2018-2019 LẦN 3) Cho hàm số $y = f(x)$ có đạo hàm cấp hai trên \mathbb{R} . Biết $f'(0) = 3$, $f'(2) = -2018$ và bảng xét dấu của $f''(x)$ như sau:

x	$-\infty$	0	2	$+\infty$	
$f''(x)$	+	0	-	0	+

Hàm số $y = f(x + 2017) + 2018x$ đạt giá trị nhỏ nhất tại điểm x_0 thuộc khoảng nào sau đây?

- A.** $(-\infty; -2017)$ **B.** $(2017; +\infty)$ **C.** $(0; 2)$ **D.** $(-2017; 0)$

Lời giải

Dựa vào bảng xét dấu của $f''(x)$ ta có bảng biến thiên của hàm số $f'(x)$

x	$-\infty$	0	2	$+\infty$	
$f''(x)$	+	0	-	0	-
$f'(x)$					

Đặt $t = x + 2017$.

Ta có $y = f(x + 2017) + 2018x = f(t) + 2018t - 2017 \cdot 2018 = g(t)$.

$g'(t) = f'(t) + 2018$.

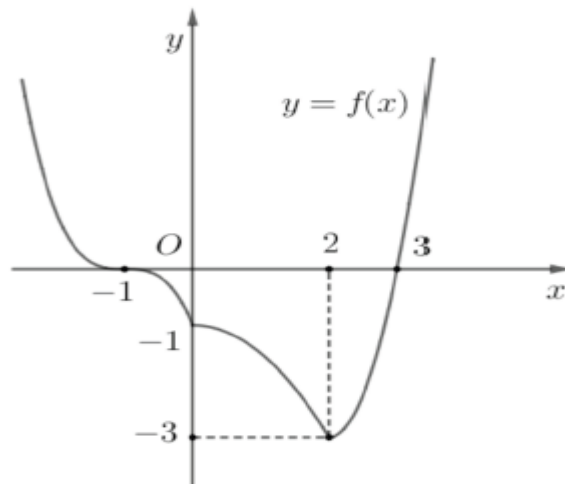
Dựa vào bảng biến thiên của hàm số $f'(x)$ suy ra phương trình $g'(t)$ có một nghiệm đơn $\alpha \in (-\infty; 0)$ và một nghiệm kép $t = 2$.

Ta có bảng biến thiên $g(t)$

Hàm số $g(t)$ đạt giá trị nhỏ nhất tại $t_0 = \alpha \in (-\infty; 0)$.

Suy ra hàm số $y = f(x+2017) + 2018x$ đạt giá trị nhỏ nhất tại x_0 mà $x_0 + 2017 \in (-\infty; 0) \Leftrightarrow x_0 \in (-\infty; -2017)$.

Câu 85. (ĐỀ THI THỬ VTED 02 NĂM HỌC 2018 - 2019) Cho hàm số $f(x)$ liên tục trên \mathbb{R} và có đồ thị như hình vẽ bên. Bất phương trình $2f(x) + x^3 > 2m + 3x^2$ nghiệm đúng với mọi $x \in (-1; 3)$ khi và chỉ khi



A. $m < -10$.

B. $m < -5$.

C. $m < -3$.

D. $m < -2$.

Hướng dẫn giải

Ta có $2f(x) + x^3 > 2m + 3x^2 \Leftrightarrow 2f(x) > -x^3 + 3x^2 + 2m$

Nhận xét $\min_{(-1;3)} f(x) = f(2) = -3$

Đặt $g(x) = -x^3 + 3x^2 + 2m, \forall x \in (-1; 3)$

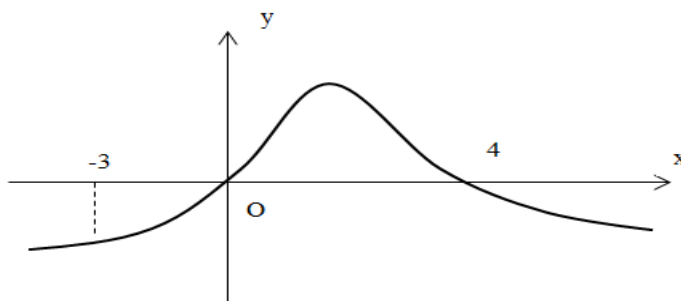
$$g'(x) = -3x^2 + 6x, g'(x) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = 0 \\ x = 2 \end{cases}$$

$g(0) = 2m; g(-1) = 4 + 2m; g(3) = 2m$ và $g(2) = 4 + 2m$

$$\Rightarrow \max_{(-1;3)} g(x) = g(2) = 4 + 2m$$

$$\text{ycbt} \Leftrightarrow 2 \min_{(-1;3)} f(x) > \max_{(-1;3)} g(x) \Leftrightarrow -6 > 2m + 4 \Leftrightarrow m < -5$$

Câu 86. (KTNL GV BẮC GIANG NĂM 2018-2019) Cho hàm số $f(x)$ có đạo hàm trên \mathbb{R} và có đồ thị của hàm $y = f'(x)$ được cho như hình vẽ.



Biết rằng $f(-3) + f(0) = f(4) + f(-1)$. Giá trị lớn nhất và giá trị nhỏ nhất của $f(x)$ trên đoạn $[-3; 4]$ lần lượt là:

- A. $f(4)$ và $f(-3)$. **B. $f(-3)$ và $f(0)$.** C. $f(4)$ và $f(0)$. D. $f(2)$ và $f(-3)$.

Lời giải

Chọn B.

Dựa vào đồ thị của hàm số $y = f'(x)$ ta có bảng biến thiên của hàm số $y = f(x)$:

x	$-\infty$	-3	0	4	$+\infty$	
$f'(x)$		$-$	0	$+$	0	$-$
$f(x)$		\swarrow	\searrow	\swarrow	\searrow	

$f(-3)$ $f(0)$ $f(4)$

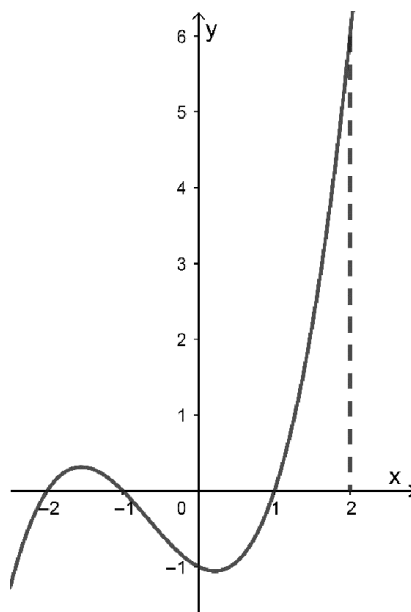
$f'(0) = f'(4) = 0$ nên $x = 0$ và $x = 4$ là hai điểm cực trị của $y = f(x)$.

Từ bảng biến thiên ta có $\min_{[-3;4]} f(x) = f(0)$, đồng thời $f(-1) > f(0)$. Do đó:

$$f(-3) + f(0) = f(4) + f(-1) \Leftrightarrow f(-3) - f(4) = f(-1) - f(0) > 0 \Rightarrow f(-3) > f(4).$$

$\Rightarrow \max_{[-3;4]} f(x) = f(-3)$. Chọn **B**

Câu 87. Cho hàm số $f(x)$ có đạo hàm là $f'(x)$. Đồ thị của hàm số $y = f'(x)$ được cho như hình vẽ dưới đây:



Biết rằng $f(-1) + f(0) < f(1) + f(2)$. Giá trị nhỏ nhất và giá trị lớn nhất của hàm số $y = f(x)$ trên đoạn $[-1; 2]$ lần lượt là:

- A.** $f(1); f(2)$. **B.** $f(2); f(0)$. **C.** $f(0); f(2)$. **D.** $f(1); f(-1)$.

Lời giải

Từ đồ thị của hàm số $y = f'(x)$ ta có bảng biến thiên của hàm số $y = f(x)$ trên đoạn $[-1; 2]$ như sau

x	-1	0	1	2
y'		-	0	+
y	$f(-1)$		$f(1)$	$f(2)$

Nhận thấy

$\min_{[-1;2]} f(x) = f(1)$

Để tìm $\max_{[-1;2]} f(x)$ ta so sánh $f(-1)$ và $f(2)$.

Theo giả thiết, $f(-1) + f(0) < f(1) + f(2) \Leftrightarrow f(2) - f(-1) > f(0) - f(1)$.

Từ bảng biến thiên, ta có $f(0) - f(1) > 0$. Do đó $f(2) - f(-1) > 0 \Leftrightarrow f(2) > f(-1)$.

Hay $\max_{[-1;2]} f(x) = f(2)$.

Dạng 7. Ứng dụng GTLN-GTNN vào bài toán đại số

Câu 88. (THPT CHUYÊN VINH PHÚC LẦN 02 NĂM 2018-2019) Tìm tất cả các giá trị tham số m để bất phương trình $6x + \sqrt{(2+x)(8-x)} \leq x^2 + m - 1$ nghiệm đúng với mọi $x \in [-2;8]$.

A. $m \geq 16$

B. $m \geq 15$

C. $m \geq 8$

D. $-2 \leq m \leq 16$

Lời giải

Chọn B

Xét bất phương trình: $6x + \sqrt{(2+x)(8-x)} \leq x^2 + m - 1$ (1), điều kiện $x \in [-2;8]$.

Đặt $t = \sqrt{(2+x)(8-x)}$, $x \in [-2;8]$. Ta có: $t' = \frac{3-x}{\sqrt{(2+x)(8-x)}}$, $t' = 0 \Leftrightarrow x = 3$

Bảng biến thiên

x	-2	3	8
t'		+	0
			-
t	0	5	0

Suy ra $t \in [0; 5]$. Khi đó (1) trở thành: $t^2 + t - 15 \leq m$ (2).

Xét hàm số $f(t) = t^2 + t - 15$, $f'(t) = 2t + 1 > 0, \forall t \in [0; 5]$

Bất phương trình (1) nghiệm đúng với mọi $x \in [-2;8]$ khi và chỉ khi (2) nghiệm đúng với mọi $t \in [0;5] \Leftrightarrow \max_{[0;5]} f(t) \leq m \Leftrightarrow m \geq 15$.

Câu 89. (GKI THPT LƯƠNG THẾ VINH HÀ NỘI NĂM 2018-2019) Tìm m để bất phương trình

$x + \frac{4}{x-1} \geq m$ có nghiệm trên khoảng $(-\infty; 1)$.

A. $m \leq 5$.

B. $m \leq -3$.

C. $m \leq 1$.

D. $m \leq -1$

Lời giải

Chọn B

$$f(x) = x + \frac{4}{x-1} \Rightarrow f'(x) = 1 - \frac{4}{(x-1)^2} = \frac{(x-1)^2 - 4}{(x-1)^2} = 0 \Rightarrow \begin{cases} x = 3(l) \\ x = -1(tm) \end{cases}$$

Bảng biến thiên

x	$-\infty$	-1	1
y'	$+$	0	$-$
y	$-\infty$	-3	$-\infty$

Vậy $m \leq -3$

Câu 90. (THPT CHUYÊN LAM SƠN THANH HÓA NĂM 2018-2019 LẦN 01) Biết rằng tập nghiệm của bất phương trình $\sqrt{2x+4} - 2\sqrt{2-x} \geq \frac{6x-4}{5\sqrt{x^2+1}}$ là $[a;b]$. Khi đó giá trị của biểu thức

$P = 3a - 2b$ bằng:

A. 2

B. 4

C. -2

D. 1

Lời giải

Chọn C

ĐK: $-2 \leq x \leq 2$

$$\text{Ta có: } \sqrt{2x+4} - 2\sqrt{2-x} \geq \frac{6x-4}{5\sqrt{x^2+1}} \Leftrightarrow \frac{2x+4-4(2-x)}{\sqrt{2x+4}+2\sqrt{2-x}} - \frac{6x-4}{5\sqrt{x^2+1}} \geq 0$$

$$\Leftrightarrow (6x-4) \left(\frac{1}{\sqrt{2x+4}+2\sqrt{2-x}} - \frac{1}{5\sqrt{x^2+1}} \right) \geq 0$$

$$\Leftrightarrow (6x-4) \left[5\sqrt{x^2+1} - (\sqrt{2x+4} + 2\sqrt{2-x}) \right] \geq 0 \quad (1)$$

Xét hàm số $f(x) = \sqrt{2x+4} + 2\sqrt{2-x}$ với $-2 \leq x \leq 2$

$$\text{Ta có } f'(x) = \frac{1}{\sqrt{2x+4}} - \frac{1}{\sqrt{2-x}} = 0 \Leftrightarrow x = -\frac{2}{3}. \text{ Do đó } f\left(-\frac{2}{3}\right) = 2\sqrt{6}; f(-2) = 4; f(2) = 2\sqrt{2}$$

Suy ra $2\sqrt{2} \leq f(x) \leq 2\sqrt{6}$ mà $5\sqrt{x^2+1} \geq 5$ nên $5\sqrt{x^2+1} - (\sqrt{2x+4} + 2\sqrt{2-x}) \geq 0$

$$(1) \Leftrightarrow 6x-4 \geq 0 \Leftrightarrow x \geq \frac{2}{3}. \text{ Kết hợp với điều kiện ta có tập nghiệm là } \left[\frac{2}{3}; 2 \right]$$

Vậy $P = 3a - 2b = -2$.

Câu 91. (CHUYÊN LÊ QUÝ ĐÔN ĐIỆN BIÊN NĂM 2018-2019 LẦN 02) Gọi s là tập hợp các giá trị nguyên của tham số $m \in [0; 2019]$ để bất phương trình

$$x^2 - m + \sqrt{(1-x^2)^3} \leq 0 \text{ đúng với mọi } x \in [-1; 1]. \text{ Số phần tử của tập } s \text{ bằng}$$

A. 1.

B. 2020.

C. 2019.

D. 2.

Lời giải

$$\text{Đặt } t = \sqrt{1-x^2}, \text{ với } x \in [-1; 1] \Rightarrow t \in [0; 1]. \text{ Bất phương trình } x^2 - m + \sqrt{(1-x^2)^3} \leq 0 \quad (1) \text{ trở thành}$$

$$t^3 - t^2 + 1 - m \leq 0 \Leftrightarrow m \geq t^3 - t^2 + 1 \quad (2)$$

Bất phương trình (1) đúng với mọi $x \in [-1;1]$ khi và chỉ khi bất phương trình (2) nghiệm đúng với mọi $t \in [0;1]$. Hay $m \geq \max_{[0;1]} (t^3 - t^2 + 1) \Leftrightarrow m \geq 1$.

Mặt khác, m là số nguyên thuộc $[0; 2019]$ nên $m \in \{1; 2; 3; \dots; 2019\}$

Vậy có 2019 giá trị của m thỏa mãn bài toán.

Câu 92. (CHUYÊN BẮC NINH NĂM 2018-2019 LẦN 03) Gọi M là giá trị lớn nhất của hàm số

$f(x) = 4\sqrt{x^2 - 4x + 6} + 4x - x^2 + 1$. Tính tích các nghiệm của phương trình $f(x) = M$.

A. 2.

B. 4.

C. -2.

D. -4.

Lời giải

Đặt $t = \sqrt{x^2 - 4x + 6} = \sqrt{(x-2)^2 + 2} \geq \sqrt{2}$.

Khi đó, $M = \max f(x) = \max_{[\sqrt{2}; +\infty)} g(t)$, với $g(t) = -t^2 + 4t + 7$ trên $[\sqrt{2}; +\infty)$.

Có $g(t) = -t^2 + 4t + 7 = 11 - (t-2)^2 \leq 11$, dấu đẳng thức xảy ra khi $t = 2 \Leftrightarrow \sqrt{x^2 - 4x + 6} = 2$

$$\Leftrightarrow x^2 - 4x + 2 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = 2 + \sqrt{2} \\ x = 2 - \sqrt{2} \end{cases}$$

Như vậy, $M = \max f(x) = \max_{[\sqrt{2}; +\infty)} g(t) = 11 \Leftrightarrow x = 2 \pm \sqrt{2}$, suy ra nghiệm của phương trình

$f(x) = M$ là $x = 2 \pm \sqrt{2}$.

Vậy tích các nghiệm của phương trình $f(x) = M$ bằng 2.

Câu 93. (THPT CHUYÊN BẮC GIANG NAM 2018-2019 LẦN 01) Cho $x^2 - xy + y^2 = 2$. Giá trị nhỏ nhất của $P = x^2 + xy + y^2$ bằng:

A. $\frac{2}{3}$

B. $\frac{1}{6}$

C. $\frac{1}{2}$

D. 2

Lời giải

Chọn A

Xét $\frac{P}{2} = \frac{x^2 + xy + y^2}{2} = \frac{x^2 + xy + y^2}{x^2 - xy + y^2}$

+nếu $y = 0$ thì $x^2 = 2$. Do đó $P = x^2 = 2$ suy ra $\min P = 2$

+nếu $y \neq 0$ ta chia tử mẫu cho y^2 ta được

$$\frac{P}{2} = \frac{x^2 + xy + y^2}{x^2 - xy + y^2} = \frac{1 + \left(\frac{x}{y}\right) + \left(\frac{x}{y}\right)^2}{1 - \left(\frac{x}{y}\right) + \left(\frac{x}{y}\right)^2}$$

Đặt $t = \frac{x}{y}$, khi đó $\frac{P}{2} = \frac{1+t+t^2}{1-t+t^2}$

Xét $f(t) = \frac{1+t+t^2}{1-t+t^2} \Rightarrow f'(t) = \frac{-2t^2+2}{(1-t+t^2)^2}$

$$f'(t) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} t = 1 \\ t = -1 \end{cases}$$

Bảng biến thiên

t	$-\infty$	-1	1	$+\infty$	
$f'(t)$	$-$	0	$+$	0	$-$
$f(t)$	1		$\frac{1}{3}$	3	1

Khi đó $\min \frac{P}{2} = \frac{1}{3}$ do đó $\min P = \frac{2}{3}$.

- Câu 94. (THPT CHUYÊN BẮC GIANG NAM 2018-2019 LẦN 01)** Cho x, y là các số thực thỏa mãn $x + y = \sqrt{x-1} + \sqrt{2y+2}$. Gọi M, m lần lượt là giá trị lớn nhất và nhỏ nhất của $P = x^2 + y^2 + 2(x+1)(y+1) + 8\sqrt{4-x-y}$. Tính giá trị $M + m$
- A.** 42 **B.** 41 **C.** 43 **D.** 44

Lời giải

Chọn C

$$(x+y)^2 = (\sqrt{x-1} + \sqrt{2}\sqrt{y+1})^2 \leq 3(x+y) \Leftrightarrow 0 \leq x+y \leq 3$$

$$P = x^2 + y^2 + 2(x+1)(y+1) + 8\sqrt{4-x-y} = (x+y)^2 + 2(x+y) + 2 + 8\sqrt{4-(x+y)}$$

Đặt $t = \sqrt{4-(x+y)}, t \in [1; 2]$.

Ta có: $f(t) = (4-t^2)^2 + 2(4-t^2) + 2 + 8t = t^4 - 10t^2 + 8t + 26$.

$$f'(t) = 4t^3 - 20t + 8$$

$$f'(t) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} t = 2 \\ t^2 + 2t - 1 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} t = 2 \in [1; 2] \\ t = -1 + \sqrt{2} \notin [1; 2] \\ t = -1 - \sqrt{2} \notin [1; 2] \end{cases}$$

$$f(1) = 25; f(2) = 18.$$

Suy ra $m = \min_{[1;2]} f(t) = f(2) = 18; M = \max_{[1;2]} f(t) = f(1) = 25$.

Vậy $M + m = 43$.

- Câu 95. (KTNL GIA BÌNH NĂM 2018-2019)** Cho bất phương trình $m(\sqrt{x^2 - 2x + 2} + 1) + x(2-x) \leq 0$. Hỏi có bao nhiêu số nguyên m không nhỏ hơn -2018 để bất phương trình đã cho có nghiệm $x \in [0; 1 + \sqrt{3}]$?
- A.** 2018 **B.** 2019 **C.** 2017 **D.** 2020

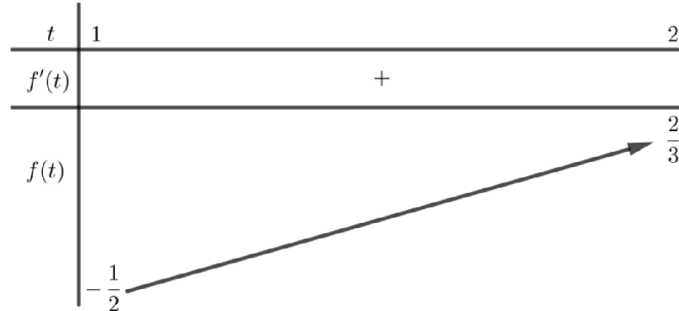
Lời giải

Chọn B

Đặt $t = \sqrt{x^2 - 2x + 2}$, ta có $x \in [0; 1 + \sqrt{3}] \Rightarrow t \in [1; 2]$. Vì $t^2 = x^2 - 2x + 2 \Leftrightarrow x(x - 2) = t^2 - 2$.

Bất phương trình đã cho trở thành $m(t + 1) \leq t^2 - 2 \Leftrightarrow m \leq \frac{t^2 - 2}{t + 1}$ (1).

Xét hàm số $f(t) = \frac{t^2 - 2}{t + 1}$, $\forall t \in [1; 2]$. Ta có $f'(t) = \frac{t^2 + 2t + 2}{(t + 1)^2} = 1 + \frac{1}{(t + 1)^2} > 0, \forall t \in (1; 2)$.



Bất phương trình đã cho có nghiệm $x \in [0; 1 + \sqrt{3}] \Leftrightarrow$ Bất phương trình (1) có nghiệm $t \in [1; 2]$

$$\Leftrightarrow m \leq \frac{2}{3}.$$

Theo giả thiết $m \geq -2018$ nên ta có $-2018 \leq m \leq \frac{2}{3}$. Vậy có tất cả là 2019 số nguyên của m thỏa yêu cầu bài toán.